WBBSE (माध्यमिक)

कक्षा 9 गणित

अध्याय 6

सामांतर चतुर्भुज के गुणधर्म

birlaeducation.org

Full Solution : पूरा हल

कषे देखी 6

परीक्षा की कॉपी में लिखने जैसा हल, हिंदी में

बिरला एजुकेशन

कक्षा 9 गणित : अध्याय 6

सामांतर चतुर्भुज के गुणधर्म

कषे देखी 6 : पूरा हल

प्रश्न → चित्र → दिया है → सूत्र और गणना → ∴ उत्तर

पहले ये बातें याद कर लें

सामांतर चतुर्भुज किसे कहते हैं : वह चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाओं के दोनों जोड़े समांतर हों, **सामांतर चतुर्भुज** कहलाता है। ABCD सामांतर चतुर्भुज में AB || DC और AD || BC होता है।

सामांतर चतुर्भुज के गुणधर्म

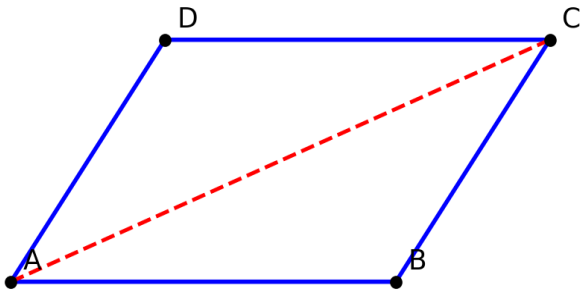
सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं : AB = CD, BC = AD

सम्मुख कोण बराबर होते हैं : ∠A = ∠C, ∠B = ∠D

आसन्न कोणों का योग 180° होता है : ∠A + ∠B = 180°

विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं : AO = OC, BO = OD

birlaeducation.org



चित्र 1 : सामांतर चतुर्भुज ABCD, विकर्ण AC उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँटता है

आकृति	पहचान
समचतुर्भुज	सामांतर चतुर्भुज जिसकी आसन्न भुजाएँ बराबर हों, सभी भुजाएँ बराबर होती हैं
आयत	सामांतर चतुर्भुज जिसका एक कोण समकोण हो, सभी कोण 90° होते हैं
वर्ग	आयत जिसकी आसन्न भुजाएँ बराबर हों, सभी भुजाएँ बराबर और सभी कोण 90° होते हैं
समलंब चतुर्भुज	चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाओं का एक जोड़ा समांतर हो

सामांतर चतुर्भुज की जाँच : किसी चतुर्भुज को सामांतर चतुर्भुज सिद्ध करने के लिए इनमें से कोई एक बात काफी है : (1) सम्मुख भुजाएँ बराबर हों, (2) सम्मुख कोण बराबर हों, (3) सम्मुख भुजाओं का एक जोड़ा बराबर भी हो और समांतर भी हो, (4) विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हों।

उपपत्ति लिखने की तरकीब : पहले **दिया है** लिखो, फिर **सिद्ध करना है** लिखो, फिर जरूरत हो तो **रचना** लिखो, फिर **उपपत्ति** में हर कथन के साथ उसका कारण लिखो, जैसे एकांतर कोण, सर्वांगसमता, सम्मुख भुजा। आखिर में **सिद्ध हुआ** लिखो।

ध्यान दो : सर्वांगसमता लिखते समय त्रिभुजों के शीर्षों का क्रम सही रखो। जैसे $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ लिखते समय A का संगत शीर्ष C, B का D और C का A होना चाहिए। क्रम गलत हो तो संगत भुजाएँ और कोण भी गलत हो जाएँगे।

कषे देखी 6.1 : सामांतर चतुर्भुज के कोण और भुजाएँ

6.1 प्रश्न 1 : $\angle B = 60°$ हो तो सामांतर चतुर्भुज के कोण

प्रश्न : हिसाब करके सामांतर चतुर्भुज ABCD के कोण लिखो, जब $\angle B = 60°$ है।

birlaeducation.org

दिया है : सामांतर चतुर्भुज ABCD में $\angle B = 60°$।

$\Rightarrow \angle D = \angle B = 60°$, क्योंकि सामांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

$\Rightarrow \angle A + \angle B = 180°$, क्योंकि AD || BC है और AB तिर्यक रेखा है, इसलिए आसन्न कोण संपूरक होते हैं।

$\Rightarrow \angle A + 60° = 180° \Rightarrow \angle A = 120°$।

$\Rightarrow \angle C = \angle A = 120°$, क्योंकि सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

$\therefore \angle A = 120°, \angle B = 60°, \angle C = 120°, \angle D = 60°$

6.1 प्रश्न 2 : सामांतर चतुर्भुज PQRS में ∠PRQ का मान

प्रश्न : बगल वाले चित्र में सामांतर चतुर्भुज PQRS है। चित्र में ∠PQR = 55° और ∠PRS = 70° दिए हैं। हिसाब करके ∠PRQ का मान लिखो।

दिया है : सामांतर चतुर्भुज PQRS में ∠PQR = 55° और ∠PRS = 70°।

⇒ ∠PQR + ∠QRS = 180°, क्योंकि PQ || SR है और QR तिर्यक रेखा है।

⇒ ∠QRS = ∠PRQ + ∠PRS।

⇒ 55° + ∠PRQ + 70° = 180°।

⇒ ∠PRQ = 180° - 125° = 55°।

∴ ∠PRQ = 55°

6.1 प्रश्न 3 : आसन्न कोणों के समद्विभाजक और ∠APD

प्रश्न : बगल वाले चित्र में AP और DP क्रमशः सामांतर चतुर्भुज ABCD के ∠BAD और ∠ADC के समद्विभाजक हैं। हिसाब करके ∠APD का मान लिखो।

birlaeducation.org

दिया है : सामांतर चतुर्भुज ABCD में AP, ∠BAD का समद्विभाजक है और DP, ∠ADC का समद्विभाजक है।

⇒ ∠BAD + ∠ADC = 180°, क्योंकि AB || DC है और AD तिर्यक रेखा है।

⇒ ∠PAD + ∠PDA = 1/2 (∠BAD + ∠ADC) = 1/2 × 180° = 90°।

⇒ त्रिभुज APD में, ∠PAD + ∠PDA + ∠APD = 180°।

⇒ 90° + ∠APD = 180° ⇒ ∠APD = 90°।

∴ ∠APD = 90°

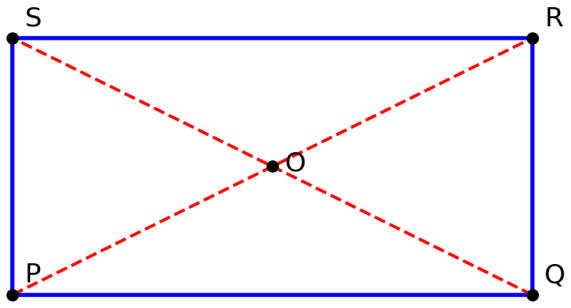
> सामांतर चतुर्भुज के आसन्न कोणों के समद्विभाजक हमेशा समकोण पर मिलते हैं।

6.1 प्रश्न 4 : आयत PQRS में x और y के मान

प्रश्न : हिसाब करके नीचे दिए गए आयत PQRS में x और y के मान लिखो। आयत के विकर्ण PR और QS एक दूसरे को O पर काटते हैं।

(1) चित्र (1) में ∠SQR = 25° है, x = ∠QSR और y = ∠QOR मानकर x और y निकालो।

(2) चित्र (2) में ∠QOR = 100° है, x = ∠QSR और y = ∠OQR मानकर x और y निकालो।



चित्र 2 : आयत PQRS, विकर्ण PR और QS, O उनका प्रतिच्छेद बिंदु है

birlaeducation.org

(1) दिया है : आयत PQRS में ∠SQR = 25°।

⇒ त्रिभुज QRS में ∠QSR + ∠SQR + ∠QRS = 180°।

⇒ ∠QRS = 90°, क्योंकि आयत का हर कोण समकोण होता है।

⇒ x + 25° + 90° = 180° ⇒ x = 65°।

⇒ आयत के विकर्ण बराबर होते हैं और एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, इसलिए OQ = OR।

⇒ त्रिभुज OQR में, ∠ORQ = ∠OQR = 25°।

⇒ y = ∠QOR = 180° - 25° - 25° = 130°।

⇒ उत्तर : x = 65°, y = 130°।

(2) दिया है : आयत PQRS में ∠QOR = 100°।

⇒ त्रिभुज OQR में OQ = OR है, इसलिए ∠OQR = ∠ORQ।

⇒ ∠OQR + ∠ORQ + ∠QOR = 180° ⇒ 2 × ∠OQR + 100° = 180°।

⇒ y = ∠OQR = 40°।

⇒ त्रिभुज QRS में, x + y + 90° = 180° ⇒ x + 40° + 90° = 180° ⇒ x = 50°।

⇒ उत्तर : x = 50°, y = 40°।

∴ (1) x = 65°, y = 130° (2) x = 50°, y = 40°

6.1 प्रश्न 5 : ABCD और ABEF से CDFE भी सामांतर चतुर्भुज

प्रश्न : बगल वाले चित्र में ABCD और ABEF दो सामांतर चतुर्भुज हैं। युक्ति की सहायता से सिद्ध करो कि CDFE भी एक सामांतर चतुर्भुज है।

दिया है : ABCD और ABEF दो सामांतर चतुर्भुज हैं।

⇒ सिद्ध करना है : CDFE एक सामांतर चतुर्भुज है।

⇒ सामांतर चतुर्भुज ABCD में, CD = AB और CD || AB।

⇒ सामांतर चतुर्भुज ABEF में, EF = AB और EF || AB।

⇒ इसलिए CD = EF और CD || EF।

⇒ चतुर्भुज CDFE में सम्मुख भुजाओं का एक जोड़ा बराबर भी है और समांतर भी है।

⇒ इसलिए CDFE एक सामांतर चतुर्भुज है।

∴ CDFE एक सामांतर चतुर्भुज है, सिद्ध हुआ

6.1 प्रश्न 6 : AB ज्यादा AD हो तो ∠BAC छोटा ∠DAC

birlaeducation.org

प्रश्न : सामांतर चतुर्भुज ABCD में AB ज्यादा AD है, तो युक्ति की सहायता से सिद्ध करो कि ∠BAC छोटा ∠DAC है।

दिया है : सामांतर चतुर्भुज ABCD में AB ज्यादा AD है।

⇒ सिद्ध करना है : ∠BAC छोटा ∠DAC है।

⇒ AD || BC है और AC तिर्यक रेखा है, इसलिए ∠DAC = ∠ACB, क्योंकि ये एकांतर कोण हैं।

⇒ सामांतर चतुर्भुज में BC = AD है, इसलिए AB ज्यादा BC है।

⇒ त्रिभुज ABC में, बड़ी भुजा AB के सामने का कोण ∠ACB, छोटी भुजा BC के सामने के कोण ∠BAC से बड़ा होता है।

⇒ इसलिए ∠ACB ज्यादा ∠BAC है।

⇒ ∠DAC = ∠ACB, इसलिए ∠DAC ज्यादा ∠BAC है।

∴ ∠BAC छोटा ∠DAC है, सिद्ध हुआ

कषे देखी 6.2 : सामांतर चतुर्भुज की जाँच

6.2 प्रश्न 1 : PQ = SR और PQ || SR हो तो PQRS सामांतर चतुर्भुज

प्रश्न : फिरोज ने एक चतुर्भुज PQRS खींचा है, जिसमें PQ = SR और PQ || SR है। युक्ति की सहायता से सिद्ध करो कि PQRS एक सामांतर चतुर्भुज है।

दिया है : चतुर्भुज PQRS में PQ = SR और PQ || SR है।

⇒ सिद्ध करना है : PQRS एक सामांतर चतुर्भुज है।

⇒ रचना : विकर्ण PR खींचो।

⇒ त्रिभुज PQR और त्रिभुज RSP में :

⇒ PQ = SR, दिया है।

⇒ ∠QPR = ∠SRP, क्योंकि PQ || SR है और PR तिर्यक रेखा है, इसलिए ये एकांतर कोण हैं।

⇒ PR उभयनिष्ठ भुजा है।

⇒ इसलिए ΔPQR ≅ ΔRSP, भुजा कोण भुजा सर्वांगसमता से।

⇒ ∠PRQ = ∠SPR, क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण हैं।

⇒ ये एकांतर कोण हैं, इसलिए QR || PS।

⇒ चतुर्भुज PQRS में PQ || SR और QR || PS है।

⇒ इसलिए PQRS एक सामांतर चतुर्भुज है।

birlaeducation.org

∴ PQRS एक सामांतर चतुर्भुज है, सिद्ध हुआ

6.2 प्रश्न 2 : AD || BC और AD = BC हो तो AB = DC और AB || DC

प्रश्न : सब्बा ने दो रेखाएँ इस तरह खींची हैं कि AD || BC और AD = BC है। युक्ति की सहायता से सिद्ध करो कि AB = DC और AB || DC है।

दिया है : AD || BC और AD = BC है।

⇒ सिद्ध करना है : AB = DC और AB || DC है।

⇒ रचना : विकर्ण AC खींचो।

⇒ त्रिभुज ABC और त्रिभुज CDA में :

⇒ AD = BC, दिया है।

⇒ ∠DAC = ∠BCA, क्योंकि AD || BC है और AC तिर्यक रेखा है, इसलिए ये एकांतर कोण हैं।

⇒ AC उभयनिष्ठ भुजा है।

⇒ इसलिए ΔABC ≅ ΔCDA, भुजा कोण भुजा सर्वांगसमता से।

⇒ AB = CD, क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ हैं।

⇒ ∠BAC = ∠DCA, क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण हैं।

⇒ ये एकांतर कोण हैं, इसलिए AB || DC।

∴ AB = DC और AB || DC है, सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

कषे देखी 6.3 : आयत, वर्ग और समचतुर्भुज की जाँच

6.3 प्रश्न 1 : विकर्ण बराबर हों तो सामांतर चतुर्भुज आयत है

प्रश्न : सिद्ध करो कि यदि किसी सामांतर चतुर्भुज के दोनों विकर्णों की लंबाई बराबर हो, तो वह सामांतर चतुर्भुज एक आयत होगा।

दिया है : सामांतर चतुर्भुज ABCD में विकर्ण AC = BD है।

⇒ सिद्ध करना है : ABCD एक आयत है।

⇒ त्रिभुज ADC और त्रिभुज BCD में :

⇒ AD = BC, क्योंकि सामांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

⇒ AC = BD, दिया है।

⇒ CD उभयनिष्ठ भुजा है।

⇒ इसलिए ΔADC ≅ ΔBCD, भुजा भुजा भुजा सर्वांगसमता से।

⇒ ∠ADC = ∠BCD, क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण हैं।

⇒ AD || BC है और CD तिर्यक रेखा है, इसलिए ∠ADC + ∠BCD = 180°।

⇒ 2 × ∠ADC = 180° ⇒ ∠ADC = 90°।

⇒ सामांतर चतुर्भुज का एक कोण समकोण है, इसलिए ABCD एक आयत है।

birlaeducation.org

∴ ABCD एक आयत है, सिद्ध हुआ

6.3 प्रश्न 2 : विकर्ण बराबर और लंब हों तो सामांतर चतुर्भुज वर्ग है

प्रश्न : सिद्ध करो कि यदि किसी सामांतर चतुर्भुज के विकर्ण लंबाई में बराबर हों और समकोण पर काटते हों, तो वह सामांतर चतुर्भुज एक वर्ग होगा।

दिया है : सामांतर चतुर्भुज ABCD में विकर्ण AC = BD हैं और वे एक दूसरे को O पर समकोण पर काटते हैं।

⇒ सिद्ध करना है : ABCD एक वर्ग है।

⇒ सामांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, इसलिए AO = OC = BO = OD।

⇒ त्रिभुज AOB और त्रिभुज BOC में :

⇒ AO = BO, ∠AOB = ∠BOC = 90°, BO उभयनिष्ठ है।

⇒ इसलिए ΔAOB ≅ ΔBOC, भुजा कोण भुजा सर्वांगसमता से।

⇒ AB = BC, क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ हैं।

⇒ इसी तरह BC = CD और CD = DA भी मिलता है, इसलिए AB = BC = CD = DA।

⇒ विकर्ण बराबर हैं, इसलिए प्रश्न 1 से ABCD एक आयत है।

⇒ आयत जिसकी सभी भुजाएँ बराबर हों, वह वर्ग होता है।

∴ ABCD एक वर्ग है, सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

6.3 प्रश्न 3 : विकर्ण समकोण पर काटें तो सामांतर चतुर्भुज समचतुर्भुज है

प्रश्न : सिद्ध करो कि जिस सामांतर चतुर्भुज के विकर्ण समकोण पर काटते हैं, वह एक समचतुर्भुज है।

दिया है : सामांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD एक दूसरे को O पर समकोण पर काटते हैं।

⇒ सिद्ध करना है : ABCD एक समचतुर्भुज है।

⇒ सामांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, इसलिए AO = OC और BO = OD।

⇒ त्रिभुज AOB और त्रिभुज COB में :

⇒ AO = CO, ∠AOB = ∠COB = 90°, BO उभयनिष्ठ भुजा है।

⇒ इसलिए ΔAOB ≅ ΔCOB, भुजा कोण भुजा सर्वांगसमता से।

⇒ AB = BC, क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ हैं।

⇒ सामांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं, इसलिए AB = BC = CD = DA।

⇒ सामांतर चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएँ बराबर हों, वह समचतुर्भुज होता है।

∴ ABCD एक समचतुर्भुज है, सिद्ध हुआ

6.3 प्रश्न 4 : O से जाने वाली रेखा और OP = OQ

प्रश्न : किसी सामांतर चतुर्भुज के दो विकर्ण एक दूसरे को O बिंदु पर काटते हैं। O से जाने वाली एक सीधी रेखा भुजाओं AB और DC को क्रमशः P और Q बिंदुओं पर काटती है। सिद्ध करो कि OP = OQ है।

दिया है : सामांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD, O पर काटते हैं। O से जाने वाली रेखा PQ, AB को P पर और DC को Q पर काटती है।

⇒ सिद्ध करना है : OP = OQ है।

⇒ त्रिभुज AOP और त्रिभुज COQ में :

⇒ AO = CO, क्योंकि सामांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

⇒ ∠OAP = ∠OCQ, क्योंकि AB || DC है और AC तिर्यक रेखा है, इसलिए ये एकांतर कोण हैं।

⇒ ∠AOP = ∠COQ, क्योंकि ये शीर्षाभिमुख कोण हैं।

⇒ इसलिए ΔAOP ≅ ΔCOQ, कोण भुजा कोण सर्वांगसमता से।

⇒ OP = OQ, क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ हैं।

∴ OP = OQ है, सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

6.3 प्रश्न 5 : समद्विबाहु समलंब में आसन्न कोण बराबर

प्रश्न : सिद्ध करो कि समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज में समांतर भुजाओं से लगे दोनों कोण बराबर होते हैं।

दिया है : ABCD एक समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज है, जिसमें AB || CD और AD = BC है।

⇒ सिद्ध करना है : ∠DAB = ∠CBA है।

⇒ रचना : D से BC के समांतर रेखा DE खींचो, जो AB को E पर काटती है।

⇒ DEBC एक सामांतर चतुर्भुज है, क्योंकि DE || BC और DC || EB है।

⇒ इसलिए DE = BC।

⇒ AD = BC दिया है, इसलिए DE = AD।

⇒ त्रिभुज ADE समद्विबाहु है, इसलिए ∠DAE = ∠DEA।

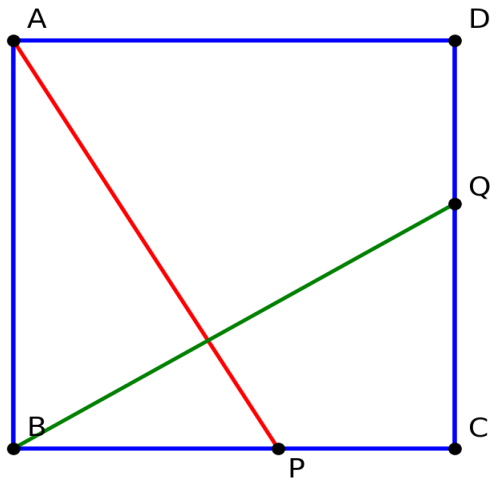
⇒ DE || BC है और AB तिर्यक रेखा है, इसलिए ∠DEA = ∠CBA, क्योंकि ये संगत कोण हैं।

⇒ इसलिए ∠DAB = ∠CBA।

∴ ∠DAB = ∠CBA है, सिद्ध हुआ

6.3 प्रश्न 6 : वर्ग में AP = BQ

प्रश्न : वर्ग ABCD में P, भुजा BC पर कोई बिंदु है। B से AP पर खींचा गया लंब भुजा DC को Q बिंदु पर काटता है। सिद्ध करो कि AP = BQ है।



चित्र 3 : वर्ग ABCD, P भुजा BC पर है, BQ लंब AP है और Q भुजा DC पर है

दिया है : ABCD एक वर्ग है, P भुजा BC पर कोई बिंदु है, B से AP पर खींचा गया लंब DC को Q पर काटता है।

⇒ सिद्ध करना है : AP = BQ है।

⇒ त्रिभुज ABP और त्रिभुज BCQ में :

⇒ AB = BC, क्योंकि वर्ग की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं।

⇒ ∠ABP = 90° और ∠BCQ = 90°, क्योंकि वर्ग के सभी कोण समकोण होते हैं।

⇒ माना AP और BQ एक दूसरे को R पर काटते हैं।

⇒ त्रिभुज ABR में, ∠BAR + ∠ABR = 90°।

⇒ ∠ABR + ∠CBQ = 90°, क्योंकि ∠ABC = 90° है।

⇒ इसलिए ∠BAR = ∠CBQ, यानी ∠BAP = ∠CBQ।

⇒ इसलिए ΔABP ≅ ΔBCQ, कोण भुजा कोण सर्वांगसमता से।

⇒ AP = BQ, क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ हैं।

∴ AP = BQ है, सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

6.3 प्रश्न 10 : दो सामांतर चतुर्भुजों से BEDF सामांतर चतुर्भुज

प्रश्न : दो सामांतर चतुर्भुजों ABCD और AECF में AC एक विकर्ण है। यदि B, E, D, F एक रेखा पर न हों, तो सिद्ध करो कि BEDF एक सामांतर चतुर्भुज है।

दिया है : ABCD और AECF दो सामांतर चतुर्भुज हैं, जिनका उभयनिष्ठ विकर्ण AC है।

⇒ सिद्ध करना है : BEDF एक सामांतर चतुर्भुज है।

⇒ माना AC और BD एक दूसरे को O पर काटते हैं।

⇒ सामांतर चतुर्भुज ABCD में विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, इसलिए O, AC और BD दोनों का मध्य बिंदु है।

⇒ सामांतर चतुर्भुज AECF में विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, इसलिए O, AC और EF दोनों का मध्य बिंदु है।

⇒ इसलिए O, BD का भी मध्य बिंदु है और EF का भी मध्य बिंदु है।

⇒ चतुर्भुज BEDF में विकर्ण BD और EF एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

⇒ इसलिए BEDF एक सामांतर चतुर्भुज है।

∴ BEDF एक सामांतर चतुर्भुज है, सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

परीक्षा में ध्यान देने वाली बातें

बच्चों की 4 आम ग़लतियाँ :

1. सम्मुख और आसन्न को उलट देना : सम्मुख कोण बराबर होते हैं, आसन्न कोणों का योग 180° होता है।
2. सर्वांगसमता में शीर्षों का क्रम गलत लिखना : संगत शीर्षों का क्रम मिलाकर लिखो, वरना संगत भुजाएँ गलत हो जाएँगी।
3. आयत, वर्ग और समचतुर्भुज की परिभाषा भूल जाना : आयत के लिए एक समकोण काफी है, वर्ग के लिए बराबर विकर्ण और समकोण दोनों चाहिए।
4. कारण लिखे बिना कथन लिखना : हर कथन के साथ उसका कारण लिखो, जैसे एकांतर कोण, सम्मुख भुजा, सर्वांगसमता।

आख़िरी जाँच की आदत : उपपत्ति पूरी करने के बाद देखो कि तुमने वही सिद्ध किया है जो पूछा गया था, और हर कथन का कारण लिखा है। चित्र में बिंदुओं के नाम वही रखो जो प्रश्न में दिए गए हैं।