WBBSE (माध्यमिक)

कक्षा 9 गणित

अध्याय 21

सेट तत्त्व

Full Solution : पूरा हल

birlaeducation.org

स्वयं करो : अध्याय के सभी प्रश्न
परीक्षा की कॉपी में लिखने जैसा हल, हिंदी में

बिरला एजुकेशन

कक्षा 9 गणित : अध्याय 21

सेट तत्त्व

स्वयं करो : पूरा हल

प्रश्न → चित्र → दिया है → सूत्र और गणना → ∴ उत्तर

पहले ये बातें याद कर लें

समुच्चय किसे कहते हैं : सुपरिभाषित भिन्न वस्तुओं के संग्रह को **समुच्चय** कहते हैं। सुपरिभाषित का अर्थ है कि किसी भी वस्तु के बारे में पक्के तौर पर कहा जा सके कि वह संग्रह में है या नहीं। जैसे कक्षा 9 के 14 वर्ष से कम उम्र वाले छात्र एक समुच्चय बनाते हैं, पर होशियार छात्र समुच्चय नहीं बनाते, क्योंकि होशियार का मतलब हर एक के लिए अलग हो सकता है। सप्ताह के 7 दिन एक समुच्चय हैं, पर सप्ताह के 3 दिन समुच्चय नहीं हैं, क्योंकि कौन से 3 दिन, यह तय नहीं है।

चिह्न	अर्थ	चिह्न	अर्थ
$\in$	अवयव है	$\notin$	अवयव नहीं है
$\subseteq$	उपसमुच्चय है	$\subset$	उचित उपसमुच्चय है
$\cup$	संघ	$\cap$	सर्वनिष्ठ
$\varnothing$	रिक्त समुच्चय	U	सार्वत्रिक समुच्चय
A^c	A का पूरक	$A \Delta B$	सममित अंतर
n(A)	A में अवयवों की संख्या	P(A)	A का घात समुच्चय

birlaeducation.org

समुच्चय लिखने की दो विधियाँ :

(i) तालिका विधि : सभी अवयव { } के अंदर लिख दिए जाते हैं। जैसे अंग्रेजी वर्णमाला के स्वरों का समुच्चय V = {a, e, i, o, u}।

(ii) समुच्चय निर्माण विधि : अवयवों का गुण लिख दिया जाता है। जैसे V = {x | x अंग्रेजी वर्णमाला का स्वर है}।

एक ही अवयव दो बार नहीं लिखा जाता : {2, 2} = {2} और {1, 1, 1, 1} = {1}, इसलिए n({1, 1, 1, 1}) = 1। अवयवों का क्रम बदलने से समुच्चय नहीं बदलता : {a, e, i, o, u} = {a, i, e, o, u}।

समुच्चय का प्रकार	मतलब	उदाहरण
परिमित समुच्चय	अवयव गिनकर बताए जा सकते हैं	{1, 2, 3, 4, 5, 6}, n = 6
अपरिमित समुच्चय	अवयव गिने नहीं जा सकते	N = {1, 2, 3, ...}, Z

एकल समुच्चय	सिर्फ एक अवयव	{2}
रिक्त समुच्चय ∅	कोई अवयव नहीं	{x : x पूर्ण संख्या है और 2 < x < 3}
समान समुच्चय	दोनों में वही अवयव	{1, 2, 3} = {2, 3, 1}
तुल्य समुच्चय	दोनों में अवयवों की संख्या बराबर	{1, 2, 3, 4} और {a, b, c, d}
उपसमुच्चय	A का हर अवयव B में हो तो A ⊆ B	{1, 2, 3} ⊆ {1, 2, 3, 4}
घात समुच्चय	किसी समुच्चय के सभी उपसमुच्चयों का समुच्चय	P(A), n(P(A)) = 2^n

दिया है : A = {1, 2, 3}।

⇒ A के उपसमुच्चय हैं : ∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {3, 1}, {1, 2, 3}।

⇒ उपसमुच्चयों की संख्या = 8 = 2^3।

⇒ उचित उपसमुच्चय वे हैं जिनमें A खुद न हो : ∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {3, 1}।

⇒ उचित उपसमुच्चयों की संख्या = 7 = $2^3 - 1$।

n अवयव वाले समुच्चय के उपसमुच्चय = 2^n

उचित उपसमुच्चय = $2^n - 1$ घात समुच्चय में अवयव = 2^n

birlaeducation.org

दिया है : A = {a, b, c}।

⇒ P(A) = {∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {b, c}, {c, a}, {a, b, c}}।

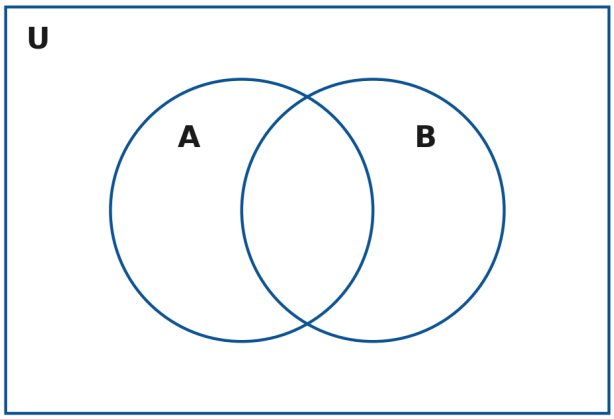
⇒ n(P(A)) = 8 = 2^3।

याद रखो : रिक्त समुच्चय ∅ हर समुच्चय का उपसमुच्चय होता है। ∅, {0} और {∅} तीनों अलग अलग हैं : ∅ में कोई अवयव नहीं, {0} में एक अवयव 0 है, {∅} में एक अवयव ∅ है। रिक्त समुच्चय सिर्फ एक ही होता है, इसलिए हमेशा the रिक्त समुच्चय कहा जाता है।

संक्रिया	परिभाषा	उदाहरण : A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {2, 4, 6, 8, 10}
संघ A ∪ B	A या B में आने वाले सभी अवयव	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10}
सर्वनिष्ठ A ∩ B	दोनों में उभयनिष्ठ अवयव	{2, 4}
अंतर A − B	A में हैं, B में नहीं	{1, 3, 5}
अंतर B − A	B में हैं, A में नहीं	{6, 8, 10}

पूरक A^C	U में हैं, A में नहीं : U − A	U = {0, 1, ..., 9}, A = {0, 1} हो तो A^C = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
सममित अंतर A Δ B	(A − B) ∪ (B − A)	{a, b, c} Δ {b, e, f} = {a, c, e, f}

अंतर के नियम : A − ∅ = A और ∅ − A = ∅। A ≠ B हो तो A − B ≠ B − A। दो समुच्चय **असंयुक्त** कहलाते हैं जब उनमें कोई उभयनिष्ठ अवयव न हो, यानी A ∩ B = ∅। जैसे परिमेय संख्याओं का समुच्चय और अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय असंयुक्त हैं।



birlasevaguru.org

चित्र 1 : वेन चित्र में सार्वत्रिक समुच्चय U आयत से और उसके उपसमुच्चय A, B वृत्तों से दिखाए जाते हैं

वेन चित्र : सार्वत्रिक समुच्चय U को आयत से और उसके उपसमुच्चयों को आयत के अंदर बने वृत्तों से दिखाया जाता है। छायांकित भाग ही वह समुच्चय होता है जिसकी बात हो रही है। जॉन वेन ने सबसे पहले समुच्चय की संक्रियाओं को इस तरह चित्र से समझाया था।

गिनती और डी मॉर्गन के सूत्र

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$(A^C)^C = A \quad A \cup \varnothing = A \quad A \cap \varnothing = \varnothing \quad A \cup A^C = U \quad A \cap A^C = \varnothing$$

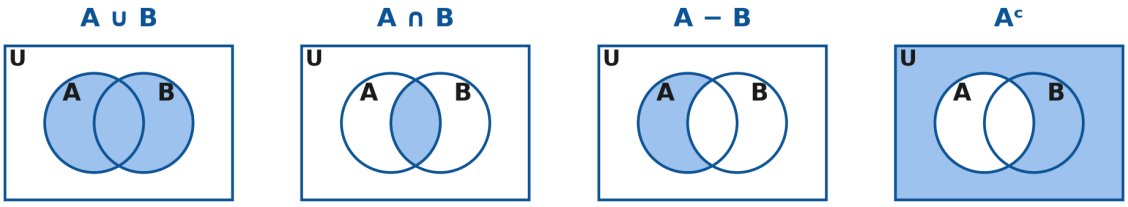
स्वयं करो (Do It Yourself)

इस अध्याय के अंत में अलग से कषे देखी नहीं दी गई है। अध्याय के बीच दिए गए सभी प्रश्न ही नीचे हल किए गए हैं।

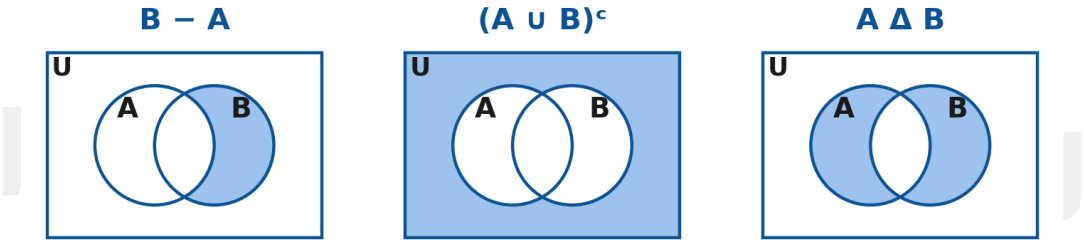
स्वयं करो 1 : वेन चित्र में छायांकित भाग पहचानो

प्रश्न : नीचे दिए गए वेन चित्रों में छायांकित भाग कौन सा समुच्चय दिखाता है, लिखो :

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) $A - B$ (iv) $B - A$ (v) A^C (vi) $(A \cup B)^C$ (vii) $A \Delta B$



चित्र 2 : (i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) $A - B$ (iv) A^C



चित्र 3 : (v) $B - A$ (vi) $(A \cup B)^C$ (vii) $A \Delta B$

(i) दोनों वृत्त पूरे छायांकित हैं, यानी A के अवयव भी और B के अवयव भी।

⇒ छायांकित भाग = $A \cup B$।

(ii) सिर्फ वह भाग छायांकित है जो दोनों वृत्तों में उभयनिष्ठ है।

⇒ छायांकित भाग = $A \cap B$।

(iii) A का वह भाग छायांकित है जो B में नहीं है।

⇒ छायांकित भाग = $A - B$।

(iv) B का वह भाग छायांकित है जो A में नहीं है।

⇒ छायांकित भाग = $B - A$।

(v) आयत का वह पूरा भाग छायांकित है जो A वृत्त के बाहर है।

⇒ छायांकित भाग = A^C।

(vi) आयत का वह पूरा भाग छायांकित है जो A और B दोनों वृत्तों के बाहर है।

⇒ छायांकित भाग = $(A \cup B)^C$।

(vii) A का B से बाहर वाला भाग और B का A से बाहर वाला भाग, दोनों छायांकित हैं, बीच का उभयनिष्ठ भाग

सफेद है।

⇒ छायांकित भाग = A Δ B।

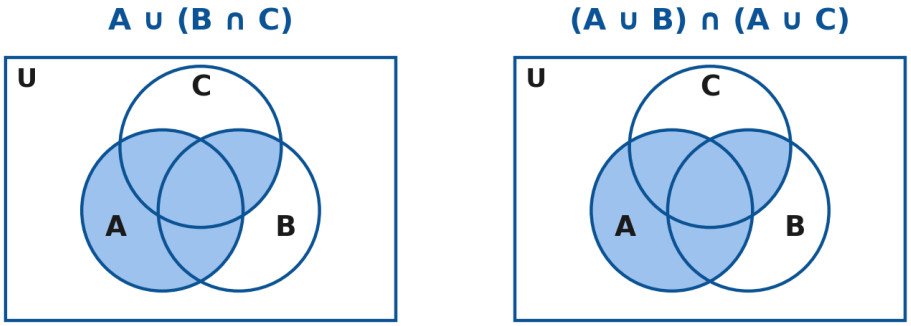
∴ (i) A ∪ B (ii) A ∩ B (iii) A – B (iv) B – A (v) A^C (vi) $(A \cup B)^C$ (vii) A Δ B

> वेन चित्र पढ़ने की तरकीब : पहले देखो कि छायांकित भाग किस वृत्त के अंदर है और किसके बाहर। अंदर वाला भाग उस समुच्चय में है, बाहर वाला भाग उसके पूरक में है।

birlaeducation.org

स्वयं करो 2 : वेन चित्र से दिखाओ कि A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)

प्रश्न : वेन चित्र की सहायता से दिखाओ कि A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C) होता है।



चित्र 4 : बायाँ चित्र A ∪ (B ∩ C) और दायाँ चित्र (A ∪ B) ∩ (A ∪ C) दिखाता है, दोनों में छायांकित भाग एक जैसा है

दिया है : तीन समुच्चय A, B, C।

⇒ बायाँ पक्ष = A ∪ (B ∩ C)।

⇒ माना x ∈ A ∪ (B ∩ C)।

⇒ x ∈ A या x ∈ (B ∩ C)।

⇒ x ∈ A या (x ∈ B और x ∈ C)।

⇒ (x ∈ A या x ∈ B) और (x ∈ A या x ∈ C)।

⇒ x ∈ (A ∪ B) और x ∈ (A ∪ C)।

⇒ x ∈ (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)।

⇒ इसलिए A ∪ (B ∩ C) ⊆ (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)।

⇒ उल्टे क्रम में भी यही तर्क चलता है, इसलिए (A ∪ B) ∩ (A ∪ C) ⊆ A ∪ (B ∩ C)।

⇒ दोनों पक्ष एक दूसरे के उपसमुच्चय हैं, इसलिए दोनों बराबर हैं।

⇒ वेन चित्र में भी दोनों तरफ छायांकित भाग एक जैसा दिखता है।

∴ A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C) सिद्ध हुआ

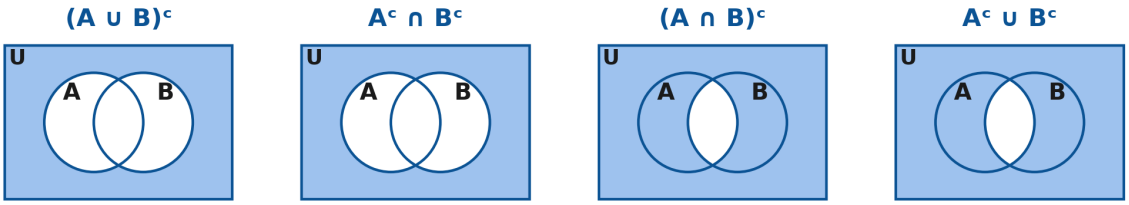
> यह संघ का सर्वनिष्ठ पर बंटन नियम है। ऐसे ही सर्वनिष्ठ का संघ पर बंटन नियम भी होता है : A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)।

hirdeducation.org

स्वयं करो 3 : वेन चित्र से बंटन नियम और डी मॉर्गन के सूत्र दिखाओ

प्रश्न : वेन चित्र की सहायता से दिखाओ कि :

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (b) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ (c) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$



चित्र 5 : (b) के दोनों चित्रों में वृत्तों के बाहर का भाग छायांकित है और (c) के दोनों चित्रों में उभयनिष्ठ भाग को छोड़कर सब छायांकित है

(a) माना $x \in A \cap (B \cup C)$।

$\Rightarrow x \in A$ और $x \in (B \cup C)$।

$\Rightarrow x \in A$ और $(x \in B$ या $x \in C)$।

$\Rightarrow (x \in A$ और $x \in B)$ या $(x \in A$ और $x \in C)$।

$\Rightarrow x \in (A \cap B)$ या $x \in (A \cap C)$।

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$।

⇒ उल्टा तर्क भी ऐसे ही चलता है।

$\Rightarrow$ इसलिए $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$।

(b) माना $x \in (A \cup B)^C$।

$\Rightarrow x \notin (A \cup B)$।

$\Rightarrow x \notin A$ और $x \notin B$।

$\Rightarrow x \in A^C$ और $x \in B^C$।

$\Rightarrow x \in A^C \cap B^C$।

⇒ उल्टा तर्क भी ऐसे ही चलता है।

$\Rightarrow$ इसलिए $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$।

(c) माना $x \in (A \cap B)^C$।

$\Rightarrow x \notin (A \cap B)$।

$\Rightarrow x \notin A$ या $x \notin B$।

$\Rightarrow x \in A^C$ या $x \in B^C$।

$\Rightarrow x \in A^C \cup B^C$।

⇒ उल्टा तर्क भी ऐसे ही चलता है।

$\Rightarrow$ इसलिए $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$।

∴ (a), (b), (c) तीनों सिद्ध हुए

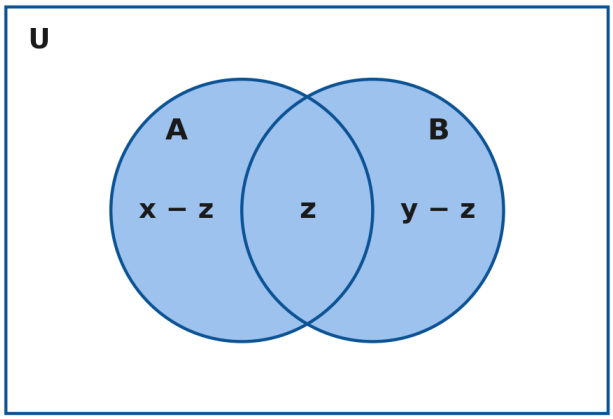
birlaeducation.org

(b) और (c) डी मॉर्गन के सूत्र हैं। (c) वाला भाग किताब में खुद करने के लिए दिया गया है, पर वही तरीका (b) जैसा है : पूरक का मतलब है उस समुच्चय में न होना, और न होना या के साथ उलट जाता है।

birlaeducation.org

स्वयं करो 4 : वेन चित्र से गिनती का सूत्र दिखाओ

प्रश्न : वेन चित्र की सहायता से दिखाओ कि n(A ∪ B) = n(A) + n(B) − n(A ∩ B) होता है। असंयुक्त समुच्चयों के लिए यह सूत्र क्या बनता है, लिखो।



n(A) = x , n(B) = y , n(A ∩ B) = z

चित्र 6 : A में x अवयव, B में y अवयव और उभयनिष्ठ भाग में z अवयव हैं

दिया है : n(A) = x, n(B) = y और n(A ∩ B) = z।

⇒ सिर्फ A में आने वाले अवयव = x − z।

⇒ सिर्फ B में आने वाले अवयव = y − z।

⇒ दोनों में उभयनिष्ठ अवयव = z।

⇒ n(A ∪ B) = (x − z) + z + (y − z)।

⇒ n(A ∪ B) = x + y − z।

⇒ इसलिए n(A ∪ B) = n(A) + n(B) − n(A ∩ B)।

⇒ असंयुक्त समुच्चयों में A ∩ B = ∅ होता है, इसलिए n(A ∩ B) = 0।

⇒ तब n(A ∪ B) = n(A) + n(B)।

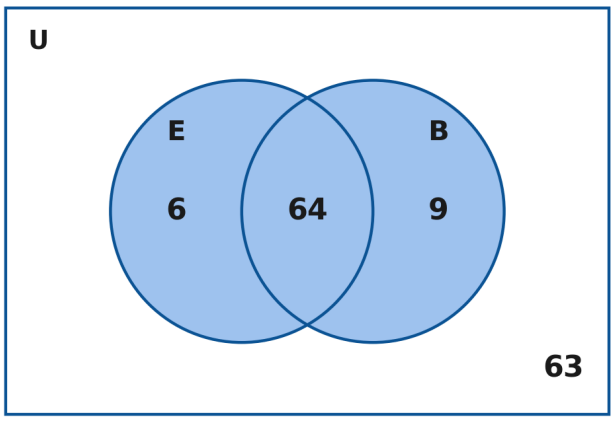
∴ n(A ∪ B) = n(A) + n(B) − n(A ∩ B) सिद्ध हुआ; असंयुक्त समुच्चयों के लिए n(A ∪ B) = n(A) + n(B)

> यह सूत्र इसलिए बनता है क्योंकि उभयनिष्ठ अवयव n(A) और n(B) दोनों में गिने जाते हैं, इसलिए उन्हें एक बार घटाना पड़ता है।

birlaeducation.org

स्वयं करो 5 : अखबार सर्वेक्षण

प्रश्न : एक इलाके के सर्वेक्षण में देखा गया कि 70 लोग अंग्रेजी अखबार पढ़ते हैं, 73 लोग बांग्ला अखबार पढ़ते हैं और 64 लोग दोनों अखबार पढ़ते हैं। यदि 63 लोग कोई अखबार नहीं पढ़ते, तो हिसाब करके बताओ कि सर्वेक्षण कितने लोगों के बीच किया गया था।



चित्र 7 : E = अंग्रेजी अखबार पढ़ने वाले, B = बांग्ला अखबार पढ़ने वाले, बाहर 63 लोग कोई अखबार नहीं पढ़ते

दिया है : माना E = अंग्रेजी अखबार पढ़ने वालों का समुच्चय और B = बांग्ला अखबार पढ़ने वालों का समुच्चय।

⇒ $n(E) = 70$, $n(B) = 73$ और $n(E \cap B) = 64$।

⇒ $n(E \cup B) = n(E) + n(B) - n(E \cap B)$।

⇒ $n(E \cup B) = 70 + 73 - 64$।

⇒ $n(E \cup B) = 79$।

⇒ इसलिए 79 लोग दो में से कम से कम एक अखबार पढ़ते हैं।

⇒ सिर्फ अंग्रेजी पढ़ने वाले = $70 - 64 = 6$ और सिर्फ बांग्ला पढ़ने वाले = $73 - 64 = 9$।

⇒ कोई अखबार न पढ़ने वाले = 63।

⇒ कुल लोग = $79 + 63 = 142$।

∴ सर्वेक्षण 142 लोगों के बीच किया गया था

> पहले हमेशा कम से कम एक अखबार पढ़ने वालों की संख्या निकालो, फिर उसमें कोई अखबार न पढ़ने वालों को जोड़ो।

birlaeducation.org

परीक्षा में ध्यान देने वाली बातें

बच्चों की 5 आम ग़लतियाँ :

1. ∅, {0} और {∅} को एक समझ लेना : तीनों अलग हैं, ∅ में कोई अवयव नहीं, {0} में एक अवयव 0 है, {∅} में एक अवयव ∅ है।
2. A − B और B − A को एक समझ लेना : दोनों अलग होते हैं, A − B में A वाले अवयव बचते हैं, B − A में B वाले।
3. n(A) = n(B) होने से A = B मान लेना : अवयवों की संख्या बराबर होने से समुच्चय बराबर नहीं होते, जैसे {1, 2, 3} और {4, 5, 6}।
4. तुल्य और समान को एक समझ लेना : समान समुच्चय हमेशा तुल्य होते हैं, पर तुल्य समुच्चय हमेशा समान नहीं होते।
5. उपसमुच्चयों की गिनती में खुद समुच्चय को भूल जाना : उचित उपसमुच्चय $2^n - 1$ होते हैं, 2^n नहीं।

आख़िरी जाँच की आदत : हर प्रश्न में पहले पूछो कि अवयव किस समुच्चय में है और किसमें नहीं। वेन चित्र में छायांकित भाग को शब्दों में बोलकर देखो, फिर चिह्न लिखो। पूरक निकालते समय हमेशा सार्वत्रिक समुच्चय U को ध्यान में रखो।

birlaeducation.org