कक्षा 9 गणित — WBBSE (माध्यमिक)

अध्याय 19 : स्थानांक ज्यामिति — सरल रेखाखंड का अंतर्विभाजन और बहिर्विभाजन

कषे देखि 19 — पूरा हल

हर प्रश्न अलग खंड में, परीक्षा की कॉपी जैसा हल

पहले — इस अभ्यास के सारे सूत्र

क्या निकालना है	सूत्र
अंतर्विभाजन (बिंदु A और B के बीच में)	$P = \left((m\cdot x_2 + n\cdot x_1) \div (m+n) , (m\cdot y_2 + n\cdot y_1) \div (m+n) \right)$ — जमा (+) का चिह्न
बहिर्विभाजन (बिंदु रेखाखंड के बाहर)	$P = \left((m\cdot x_2 - n\cdot x_1) \div (m-n) , (m\cdot y_2 - n\cdot y_1) \div (m-n) \right)$ — घटा (−) का चिह्न
मध्यबिंदु	$M = \left((x_1 + x_2) \div 2 , (y_1 + y_2) \div 2 \right)$ — यह 1:1 वाला अंतर्विभाजन ही है
अनुपात निकालना	माना P, AB को m:n में बाँटता है; सूत्र से m और n निकालो — ऋणात्मक मान आए तो बहिर्विभाजन समझो
दो बिंदुओं के बीच की दूरी	$AB = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$

याद रखो : m:n में m हमेशा दूसरे बिंदु (x_2, y_2) के साथ और n पहले बिंदु (x_1, y_1) के साथ लगता है। अंतर्विभाजन में P अंदर होता है और सूत्र में जमा (+) होता है; बहिर्विभाजन में P बाहर होता है और सूत्र में घटा (−) होता है।

प्रश्न 1 (i)

नीचे दिए गए बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड को दिए गए अनुपात में बाँटने वाले बिंदु के निर्देशांक निकालो : (6, −14) और (−8, 10) ; 3:4 के अनुपात में अंतर्विभाजन से।

दिया है, A(6, −14) और B(−8, 10) हैं और बिंदु P, AB को 3:4 के अनुपात में अंदर से बाँटता है।

अंतर्विभाजन के सूत्र से, $P = \left((3\times(-8) + 4\times 6) \div (3+4) , (3\times 10 + 4\times(-14)) \div (3+4) \right)$

$= \left((-24 + 24) \div 7 , (30 - 56) \div 7 \right) = \left(0 \div 7 , -26 \div 7 \right) = (0, -26/7)$

उत्तर : (0, −26/7)

प्रश्न 1 (ii)

(5, 3) और (−7, −2) को जोड़ने वाले रेखाखंड को 2:3 के अनुपात में अंतर्विभाजन से बाँटने वाले बिंदु के निर्देशांक निकालो।

दिया है, A(5, 3) और B(−7, −2) हैं और बिंदु P, AB को 2:3 के अनुपात में अंदर से बाँटता है।

अंतर्विभाजन के सूत्र से, P = ((2 × (−7) + 3 × 5) ÷ (2 + 3) , (2 × (−2) + 3 × 3) ÷ (2 + 3))

= ((−14 + 15) ÷ 5 , (−4 + 9) ÷ 5) = (1 ÷ 5 , 5 ÷ 5) = (1/5, 1)

उत्तर : (1/5, 1)

प्रश्न 1 (iii)

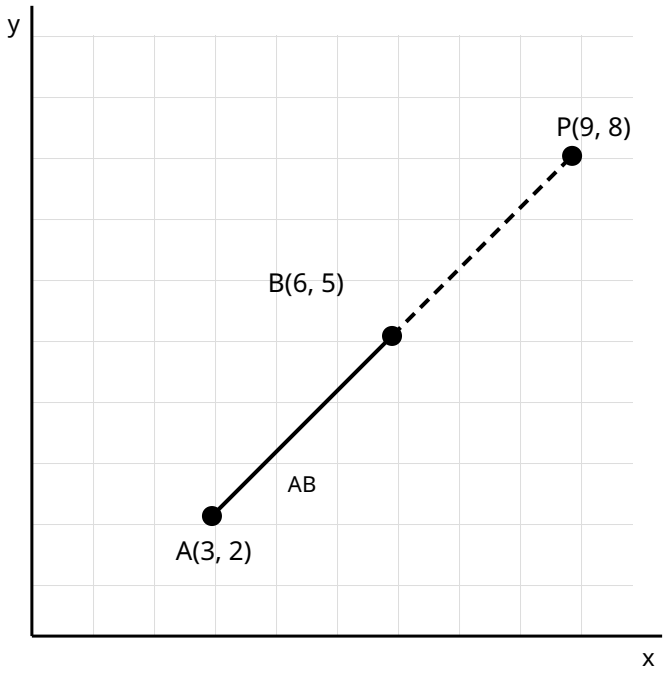
(−1, 2) और (4, −5) को जोड़ने वाले रेखाखंड को 3:2 के अनुपात में बहिर्विभाजन से बाँटने वाले बिंदु के निर्देशांक निकालो।

दिया है, A(−1, 2) और B(4, −5) हैं और बिंदु P, AB को 3:2 के अनुपात में बाहर से बाँटता है।

बहिर्विभाजन के सूत्र से, P = ((3 × 4 − 2 × (−1)) ÷ (3 − 2) , (3 × (−5) − 2 × 2) ÷ (3 − 2))

= ((12 + 2) ÷ 1 , (−15 − 4) ÷ 1) = (14, −19)

उत्तर : (14, −19)



प्रश्न 1 (iv) — P, रेखाखंड के बाहर है, B से आगे बढ़े हुए हिस्से पर (टूटी हुई रेखा बढ़ा हुआ हिस्सा है)

प्रश्न 1 (iv)

(3, 2) और (6, 5) को जोड़ने वाले रेखाखंड को 2:1 के अनुपात में बहिर्विभाजन से बाँटने वाले बिंदु के निर्देशांक निकालो।

दिया है, A(3, 2) और B(6, 5) हैं और बिंदु P, AB को 2:1 के अनुपात में बाहर से बाँटता है।

बहिर्विभाजन के सूत्र से, P = ((2 × 6 − 1 × 3) ÷ (2 − 1) , (2 × 5 − 1 × 2) ÷ (2 − 1))

= ((12 − 3) ÷ 1 , (10 − 2) ÷ 1) = (9, 8)

जाँच : PA = 6√2 और PB = 3√2 ⇒ PA:PB = 2:1 ✓ (P, B के आगे बाहर है, इसलिए PB छोटा है)

उत्तर : (9, 8)

प्रश्न 2 (i)

नीचे दिए गए बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड के मध्यबिंदु के निर्देशांक निकालो : (5, 4) और (3, −4)

दिया है, A(5, 4) और B(3, −4) हैं।

मध्यबिंदु M = ((5 + 3) ÷ 2 , (4 + (−4)) ÷ 2) = (8 ÷ 2 , 0 ÷ 2) = (4, 0)

उत्तर : (4, 0)

प्रश्न 2 (ii)

(6, 0) और (0, 7) को जोड़ने वाले रेखाखंड के मध्यबिंदु के निर्देशांक निकालो।

दिया है, A(6, 0) और B(0, 7) हैं।

मध्यबिंदु M = ((6 + 0) ÷ 2 , (0 + 7) ÷ 2) = (6 ÷ 2 , 7 ÷ 2) = (3, 7/2)

उत्तर : (3, 7/2)

प्रश्न 3

बिंदु (1, 3), (4, 6) और (3, 5) बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड को किस अनुपात में बाँटता है, हिसाब करके लिखो।

नोट : कुछ स्रोतों में दूसरा बिंदु (6, 5) छपा है, पर बिंदु (1, 3), (4, 6) और (6, 5) से बनने वाली रेखा पर पड़ता ही नहीं — इसलिए किताब का बिंदु (3, 5) ही सही है।

माना बिंदु P(1, 3), A(4, 6) और B(3, 5) को जोड़ने वाले रेखाखंड को m:n के अनुपात में बाँटता है।

विभाजन के सूत्र से, (1, 3) = ((m × 3 + n × 4) ÷ (m + n) , (m × 5 + n × 6) ÷ (m + n))

x-निर्देशांक से, (3m + 4n) ÷ (m + n) = 1 ⇒ 3m + 4n = m + n ⇒ 2m = −3n ⇒ m ÷ n = −3 ÷ 2

m:n का मान ऋणात्मक आया है, इसलिए बिंदु P रेखाखंड को बाहर से बाँटता है।

y-निर्देशांक से जाँच : m = 3, n = −2 लेने पर, (5 × 3 + 6 × (−2)) ÷ (3 − 2) = (15 − 12) ÷ 1 = 3 ✓

उत्तर : 3:2 के अनुपात में बहिर्विभाजन से

प्रश्न 4

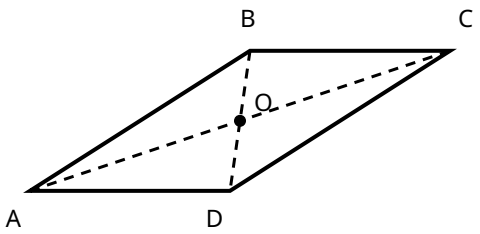
(7, 3) और (−9, 6) बिंदुओं को जोड़ने वाला रेखाखंड y-अक्ष से किस अनुपात में बँटता है, हिसाब करके लिखो।

माना y-अक्ष रेखाखंड AB को P बिंदु पर m:n के अनुपात में बाँटता है। y-अक्ष पर हर बिंदु का x-निर्देशांक 0 होता है, इसलिए P का x-निर्देशांक 0 है।

विभाजन के सूत्र से, 0 = (m × (−9) + n × 7) ÷ (m + n) ⇒ −9m + 7n = 0 ⇒ 7n = 9m ⇒ m ÷ n = 7 ÷ 9

m:n का मान धनात्मक आया है, इसलिए y-अक्ष रेखाखंड को अंदर से बाँटता है।

उत्तर : 7:9 के अनुपात में अंतर्विभाजन से



समांतर चतुर्भुज — दोनों विकर्ण (AC और BD) एक-दूसरे को O पर समद्विभाजित करते हैं

प्रश्न 5

सिद्ध करो कि A(7, 3), B(9, 6), C(10, 12) और D(8, 9) बिंदुओं को क्रम से जोड़ने पर समांतर चतुर्भुज बनता है।

समांतर चतुर्भुज में दोनों विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, अर्थात दोनों विकर्णों का मध्यबिंदु एक ही होता है।

विकर्ण AC का मध्यबिंदु = ((7 + 10) ÷ 2 , (3 + 12) ÷ 2) = (17 ÷ 2 , 15 ÷ 2) = (8.5, 7.5)

विकर्ण BD का मध्यबिंदु = ((9 + 8) ÷ 2 , (6 + 9) ÷ 2) = (17 ÷ 2 , 15 ÷ 2) = (8.5, 7.5)

दोनों विकर्णों का मध्यबिंदु एक ही है, इसलिए विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

∴ ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। (सिद्ध हुआ)

प्रश्न 6

यदि (3, 2), (6, 3), (x, y) और (6, 5) बिंदुओं को क्रम से जोड़ने पर समांतर चतुर्भुज बनता है, तो (x, y) का मान निकालो।

समांतर चतुर्भुज में दोनों विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, इसलिए उनके मध्यबिंदु बराबर होंगे।

यहाँ विकर्ण हैं — (3, 2) और (x, y) को जोड़ने वाला विकर्ण, तथा (6, 3) और (6, 5) को जोड़ने वाला विकर्ण।

(6, 3) और (6, 5) को जोड़ने वाले विकर्ण का मध्यबिंदु = ((6 + 6) ÷ 2 , (3 + 5) ÷ 2) = (6, 4)

(3, 2) और (x, y) को जोड़ने वाले विकर्ण का मध्यबिंदु = ((3 + x) ÷ 2 , (2 + y) ÷ 2)

दोनों मध्यबिंदु बराबर हैं, इसलिए (3 + x) ÷ 2 = 6 ⇒ 3 + x = 12 ⇒ x = 9; और (2 + y) ÷ 2 = 4 ⇒ 2 + y = 8 ⇒ y = 6।

उत्तर : (x, y) = (9, 6)

प्रश्न 7

यदि (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) और (x_4, y_4) बिंदुओं को क्रम से जोड़ने पर समांतर चतुर्भुज बनता है, तो सिद्ध करो कि $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ और $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$ है।

समांतर चतुर्भुज में दोनों विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, इसलिए उनके मध्यबिंदु बराबर होंगे।

पहला विकर्ण (x_1, y_1) और (x_3, y_3) को जोड़ता है, उसका मध्यबिंदु = $((x_1 + x_3) \div 2 , (y_1 + y_3) \div 2)$

दूसरा विकर्ण (x_2, y_2) और (x_4, y_4) को जोड़ता है, उसका मध्यबिंदु = $((x_2 + x_4) \div 2 , (y_2 + y_4) \div 2)$

दोनों मध्यबिंदु बराबर हैं, इसलिए $(x_1 + x_3) \div 2 = (x_2 + x_4) \div 2 \Rightarrow x_1 + x_3 = x_2 + x_4$; और $(y_1 + y_3) \div 2 = (y_2 + y_4) \div 2 \Rightarrow y_1 + y_3 = y_2 + y_4$।

(सिद्ध हुआ)

प्रश्न 8

त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B और C के निर्देशांक क्रमशः (−1, 3), (1, −1) और (5, 1) हैं; माध्यिका AD की लंबाई निकालो।

AD माध्यिका है, इसलिए D, BC का मध्यबिंदु है।

D = ((1 + 5) ÷ 2 , (−1 + 1) ÷ 2) = (6 ÷ 2 , 0 ÷ 2) = (3, 0)

दो बिंदुओं के बीच की दूरी के सूत्र से, AD = √[(3 − (−1))² + (0 − 3)²] = √[(4)² + (−3)²] = √[16 + 9] = √25 = 5 इकाई।

उत्तर : 5 इकाई

प्रश्न 9

एक त्रिभुज के तीनों शीर्षों के निर्देशांक क्रमशः (2, −4), (6, −2) और (−4, 2) हैं; त्रिभुज की तीनों माध्यिकाओं की लंबाई निकालो।

नोट : कुछ स्रोतों में पहला शीर्ष (2, 4) छपा है, पर उत्तर (√17, 5√2, √89) तभी आते हैं जब वह (2, −4) हो।

माना त्रिभुज के शीर्ष A(2, −4), B(6, −2) और C(−4, 2) हैं।

पहली माध्यिका (A से) : BC का मध्यबिंदु = ((6 + (−4)) ÷ 2 , (−2 + 2) ÷ 2) = (1, 0)

A से इस मध्यबिंदु की दूरी = √[(2 − 1)² + (−4 − 0)²] = √[1 + 16] = √17 इकाई।

दूसरी माध्यिका (B से) : CA का मध्यबिंदु = ((2 + (−4)) ÷ 2 , (−4 + 2) ÷ 2) = (−1, −1)

B से इस मध्यबिंदु की दूरी = √[(6 − (−1))² + (−2 − (−1))²] = √[(7)² + (−1)²] = √[49 + 1] = √50 = 5√2 इकाई।

तीसरी माध्यिका (C से) : AB का मध्यबिंदु = ((2 + 6) ÷ 2 , (−4 + (−2)) ÷ 2) = (4, −3)

C से इस मध्यबिंदु की दूरी = √[(−4 − 4)² + (2 − (−3))²] = √[(−8)² + (5)²] = √[64 + 25] = √89 इकाई।

उत्तर : √17, 5√2 और √89 इकाई

प्रश्न 10

एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्यबिंदुओं के निर्देशांक (4, 3), (−2, 7) और (0, 11) हैं; त्रिभुज के तीनों शीर्षों के निर्देशांक निकालो।

माना त्रिभुज के शीर्ष $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ हैं।

AB का मध्यबिंदु (4, 3) है, इसलिए $x_1 + x_2 = 8$ और $y_1 + y_2 = 6$।

BC का मध्यबिंदु (−2, 7) है, इसलिए $x_2 + x_3 = -4$ और $y_2 + y_3 = 14$।

CA का मध्यबिंदु (0, 11) है, इसलिए $x_3 + x_1 = 0$ और $y_3 + y_1 = 22$।

x वाले तीनों समीकरण जोड़ने पर, $2(x_1 + x_2 + x_3) = 8 - 4 + 0 = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$\therefore x_3 = 2 - 8 = -6$; $x_1 = 2 - (-4) = 6$; $x_2 = 2 - 0 = 2$।

y वाले तीनों समीकरण जोड़ने पर, $2(y_1 + y_2 + y_3) = 6 + 14 + 22 = 42 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 21$

$\therefore y_3 = 21 - 6 = 15$; $y_1 = 21 - 14 = 7$; $y_2 = 21 - 22 = -1$।

∴ त्रिभुज के शीर्ष हैं — A(6, 7), B(2, −1) और C(−6, 15)।

जाँच : AB का मध्यबिंदु ((6 + 2) ÷ 2, (7 + (−1)) ÷ 2) = (4, 3) ✓; BC का मध्यबिंदु ((2 + (−6)) ÷ 2, (−1 + 15) ÷ 2) = (−2, 7) ✓; CA का मध्यबिंदु ((−6 + 6) ÷ 2, (15 + 7) ÷ 2) = (0, 11) ✓

उत्तर : (6, 7), (2, −1) और (−6, 15)

इस अभ्यास में सबसे ज़्यादा होने वाली गलतियाँ :

- अंतर्विभाजन में जमा (+) और बहिर्विभाजन में घटा (−) लगता है — चिह्न मत भूलो।
- m:n में m हमेशा दूसरे बिंदु (x_2, y_2) के साथ लगता है, पहले के साथ नहीं।
- अनुपात निकालते समय ऋणात्मक मान आए तो वह बहिर्विभाजन है, गलती नहीं — उसे 3:2 बहिर्विभाजन लिखो।
- मध्यबिंदु निकालते समय दोनों निर्देशांकों को अलग-अलग जोड़कर 2 से भाग दो।
- समांतर चतुर्भुज सिद्ध करने के लिए दोनों विकर्णों के मध्यबिंदु बराबर दिखाओ — भुजाएँ नापने की ज़रूरत नहीं।