WBBSE (माध्यमिक)

कक्षा 9 गणित

अध्याय 17

समबिन्दु संबंधी प्रमेय

birlaeducation.org

Full Solution : पूरा हल

कषे देखी 17 + स्वयं करो

परीक्षा की कॉपी में लिखने जैसा हल, हिंदी में

बिरला एजुकेशन

कक्षा 9 गणित : अध्याय 17

समबिन्दु संबंधी प्रमेय

कषे देखी 17 और स्वयं करो : पूरा हल

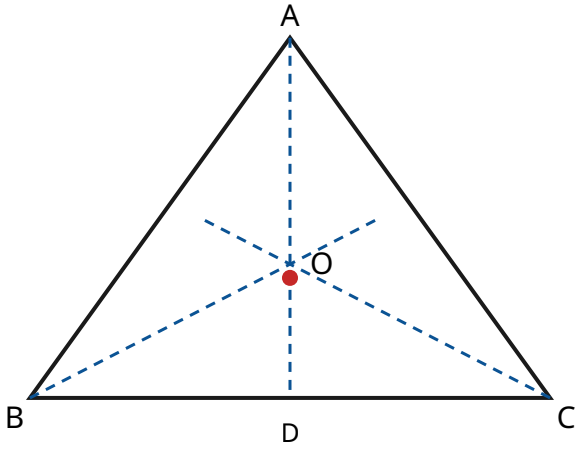
प्रश्न → चित्र → दिया है → सूत्र और गणना → ∴ उत्तर

पहले ये बातें याद कर लें

समबिन्दु रेखाएँ किसे कहते हैं : तीन या तीन से अधिक रेखाएँ जब एक ही बिंदु से होकर जाती हैं, तो वे रेखाएँ **समबिन्दु रेखाएँ** कहलाती हैं और वह बिंदु उनका **समबिन्दु** कहलाता है। इस अध्याय में त्रिभुज की चार तरह की रेखाओं के समबिन्दु पढ़ेंगे : भुजाओं के लंब समद्विभाजक, शीर्षों से डाले गए लंब, कोणों के समद्विभाजक और माध्यिकाएँ।

समबिन्दु	कौन सी रेखाएँ मिलती हैं	क्या नाम है
भुजाओं के लंब समद्विभाजक	तीनों भुजाओं के लंब समद्विभाजक	परिकेन्द्र (O)
शीर्षों से लंब (ऊँचाई)	तीनों शीर्षलंब	लंबकेन्द्र (H)
कोणों के समद्विभाजक	तीनों कोणों के अंत: समद्विभाजक	अंत:केन्द्र (I)
माध्यिकाएँ	तीनों माध्यिकाएँ	केन्द्रक (G)

birlaeducation.org



चित्र 1 : त्रिभुज ABC में भुजाओं के लंब समद्विभाजक एक बिंदु O (परिकेन्द्र) पर मिलते हैं, OA = OB = OC

परिकेन्द्र : OA = OB = OC (परित्रिज्या)

केन्द्रक : माध्यिका को शीर्ष से 2 : 1 में बाँटता है

अंत:केन्द्र : तीनों भुजाओं से समान दूरी पर होता है

परिकेन्द्र कहाँ होता है : न्यून कोण त्रिभुज में परिकेन्द्र त्रिभुज के **अंदर** होता है, समकोण त्रिभुज में कर्ण के **मध्यबिंदु** पर होता है और अधिक कोण त्रिभुज में त्रिभुज के **बाहर** होता है। केन्द्रक हमेशा त्रिभुज के अंदर होता है, चाहे त्रिभुज कैसा भी हो।

तीन कोण वाले सूत्र (बहुत काम के) : परिकेन्द्र O हो तो ∠BOC = 2∠BAC। लंबकेन्द्र H हो तो ∠BHC = 180° − ∠BAC। अंतःकेन्द्र I हो तो ∠BIC = 90° + ∠BAC/2। समकोण त्रिभुज में परित्रिज्या = कर्ण/2।

माध्यिका से क्षेत्रफल : तीनों माध्यिकाएँ त्रिभुज को क्षेत्रफल के 6 बराबर भागों में बाँटती हैं। इसलिए त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 36 वर्ग सेमी हो तो ΔAGB का क्षेत्रफल 12, ΔCGE का 6 और चतुर्भुज BDGF का 12 वर्ग सेमी होता है।

ध्यान दो : अंतःकेन्द्र भुजाओं से समान दूरी पर होता है, परिकेन्द्र शीर्षों से समान दूरी पर होता है। दोनों को आपस में मत बदलो। और केन्द्रक माध्यिका को 2 : 1 में बाँटता है, 1 : 1 में नहीं।

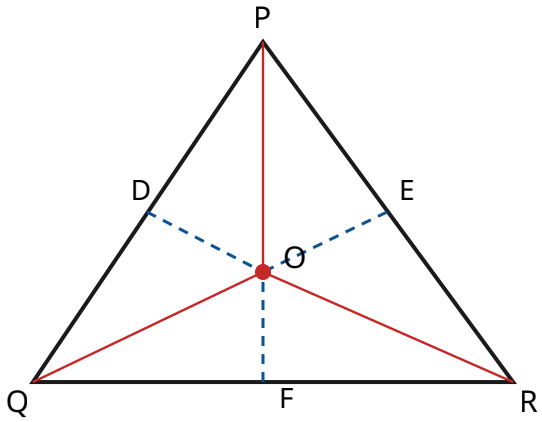
स्वयं करो (Do It Yourself)

अध्याय के बीच में दिए गए स्वयं करने वाले प्रश्न : हर एक का पूरा हल नीचे है।

birlaeducation.org

स्वयं करो 17.1 (1) : न्यून कोण त्रिभुज के लंब समद्विभाजक

प्रश्न : एक न्यून कोण त्रिभुज PQR बनाकर सिद्ध करो कि उसकी भुजाओं के लंब समद्विभाजक समबिन्दु होते हैं। परिकेन्द्र त्रिभुज के अंदर है, बाहर है या भुजा पर है, यह भी लिखो।



चित्र 2 : न्यून कोण त्रिभुज PQR, D, E, F भुजाओं के मध्यबिंदु हैं, OD, OE, OF लंब समद्विभाजक हैं

दिया है : PQR एक न्यून कोण त्रिभुज है। D, E, F क्रमशः भुजाओं PQ, QR, PR के मध्यबिंदु हैं।

⇒ OD, OE क्रमशः PQ और QR के लंब समद्विभाजक हैं, जो बिंदु O पर मिलते हैं। O, P; O, Q; O, R को जोड़ो।

⇒ ΔPOD और ΔQOD में : PD = QD (D, PQ का मध्यबिंदु है), ∠PDO = ∠QDO = 90°, OD उभयनिष्ठ भुजा है।

birlaeducation.org

⇒ ΔPOD ≅ ΔQOD (भुजा कोण भुजा सर्वांगसमता से)।

⇒ OP = OQ (सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)।

⇒ इसी तरह ΔQOE ≅ ΔROE से OQ = OR।

⇒ OP = OQ = OR।

⇒ अब ΔPFO और ΔRFO में : OP = OR, PF = RF (F, PR का मध्यबिंदु है), OF उभयनिष्ठ भुजा है।

⇒ ΔPFO ≅ ΔRFO (भुजा भुजा भुजा सर्वांगसमता से)।

⇒ ∠PFO = ∠RFO।

⇒ ∠PFO + ∠RFO = 180°, इसलिए ∠PFO = ∠RFO = 90°।

⇒ OF, PR पर लंब है, अर्थात तीसरा लंब समद्विभाजक भी O से ही जाता है।

⇒ तीनों लंब समद्विभाजक बिंदु O पर मिलते हैं, इसलिए वे समबिन्दु हैं।

⇒ न्यून कोण त्रिभुज में बिंदु O त्रिभुज के अंदर पड़ता है।

∴ भुजाओं के लंब समद्विभाजक समबिन्दु हैं और परिकेन्द्र त्रिभुज के अंदर है

स्वयं करो 17.1 (2) : अधिक कोण त्रिभुज के लंब समद्विभाजक

प्रश्न : एक अधिक कोण त्रिभुज बनाकर सिद्ध करो कि उसकी भुजाओं के लंब समद्विभाजक समबिन्दु होते हैं। परिकेन्द्र त्रिभुज के अंदर है, बाहर है या भुजा पर है, यह भी लिखो।

दिया है : PQR एक अधिक कोण त्रिभुज है।

⇒ पिछले प्रश्न वाली ही रचना करो : D, E, F भुजाओं PQ, QR, PR के मध्यबिंदु हैं, OD और OE लंब समद्विभाजक हैं जो O पर मिलते हैं।

⇒ ΔPOD ≅ ΔQOD (भुजा कोण भुजा से) से OP = OQ।

⇒ ΔQOE ≅ ΔROE (भुजा कोण भुजा से) से OQ = OR।

⇒ OP = OQ = OR।

⇒ ΔPFO ≅ ΔRFO (भुजा भुजा भुजा से) से ∠PFO = ∠RFO = 90°।

⇒ OF भी PR का लंब समद्विभाजक है और O से जाता है।

⇒ तीनों लंब समद्विभाजक बिंदु O पर मिलते हैं, इसलिए वे समबिन्दु हैं।

⇒ अधिक कोण त्रिभुज में बिंदु O त्रिभुज के बाहर पड़ता है।

∴ भुजाओं के लंब समद्विभाजक समबिन्दु हैं और परिकेन्द्र त्रिभुज के बाहर है

birlaeducation.org

स्वयं करो 17.1 (3) : समकोण त्रिभुज के लंब समद्विभाजक

प्रश्न : रीता ने एक समकोण त्रिभुज बनाया। सिद्ध करो कि उसकी भुजाओं के लंब समद्विभाजक समबिन्दु होते हैं। परिकेन्द्र कहाँ है, यह भी लिखो।

दिया है : त्रिभुज PQR में ∠Q = 90° है, PR कर्ण है। M, PR का मध्यबिंदु है।

⇒ PQ का लंब समद्विभाजक QR के समांतर होता है, क्योंकि दोनों ही PQ पर लंब हैं।

⇒ PQ के मध्यबिंदु से होकर QR के समांतर खींची गई रेखा PR को उसके मध्यबिंदु M पर काटती है।

⇒ इसलिए PQ का लंब समद्विभाजक M से होकर जाता है।

⇒ इसी तरह QR का लंब समद्विभाजक भी M से होकर जाता है।

⇒ दोनों लंब समद्विभाजक M पर मिलते हैं, इसलिए M ही परिकेन्द्र है।

⇒ PR का लंब समद्विभाजक भी M से ही जाता है, क्योंकि M, PR का मध्यबिंदु है।

⇒ तीनों लंब समद्विभाजक M पर मिलते हैं, इसलिए वे समबिन्दु हैं।

⇒ परिकेन्द्र कर्ण PR के मध्यबिंदु M पर है, अर्थात भुजा पर है।

∴ भुजाओं के लंब समद्विभाजक समबिन्दु हैं और परिकेन्द्र कर्ण के मध्यबिंदु पर है

समकोण त्रिभुज में कर्ण का मध्यबिंदु तीनों शीर्षों से समान दूरी पर होता है, इसलिए वही परिकेन्द्र बनता है।

birlaeducation.org

स्वयं करो 17.2 (1) : 6 सेमी, 8 सेमी, 10 सेमी भुजाओं वाले त्रिभुज की परित्रिज्या

प्रश्न : किसी त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई 6 सेमी, 8 सेमी और 10 सेमी है। उसकी परित्रिज्या की लंबाई लिखो।

दिया है : त्रिभुज की भुजाएँ 6 सेमी, 8 सेमी और 10 सेमी हैं।

⇒ $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$।

⇒ $10^2 = 100$।

⇒ $6^2 + 8^2 = 10^2$, इसलिए पाइथागोरस के विलोम से त्रिभुज समकोण त्रिभुज है और 10 सेमी लंबी भुजा कर्ण है।

⇒ समकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र कर्ण के मध्यबिंदु पर होता है।

⇒ परित्रिज्या = कर्ण/2 = 10/2 = 5 सेमी।

∴ परित्रिज्या = 5 सेमी

स्वयं करो 17.2 (2) : परित्रिज्या 10 सेमी हो तो कर्ण कितना

प्रश्न : किसी समकोण त्रिभुज की परित्रिज्या की लंबाई 10 सेमी हो, तो उसके कर्ण की लंबाई लिखो।

दिया है : समकोण त्रिभुज की परित्रिज्या = 10 सेमी।

⇒ समकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र कर्ण के मध्यबिंदु पर होता है।

⇒ परित्रिज्या = कर्ण/2।

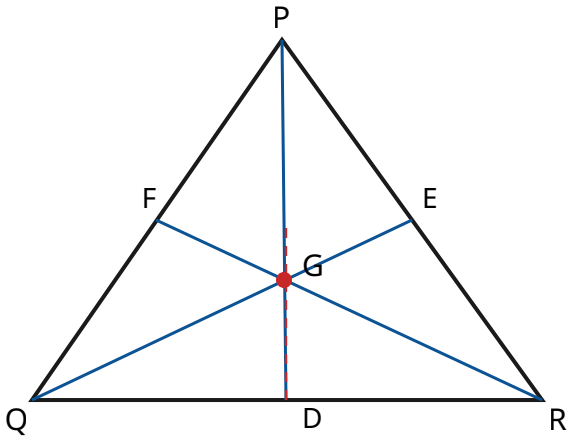
⇒ कर्ण = 2 × परित्रिज्या = 2 × 10 = 20 सेमी।

∴ कर्ण की लंबाई = 20 सेमी

birlaeducation.org

स्वयं करो 17.3 (1) : त्रिभुज की माध्यिकाएँ समबिन्दु होती हैं

प्रश्न : एक त्रिभुज PQR बनाकर तर्क से सिद्ध करो कि त्रिभुज की माध्यिकाएँ समबिन्दु होती हैं।



चित्र 3 : त्रिभुज PQR की माध्यिकाएँ PD, QE, RF बिंदु G (केन्द्रक) पर मिलती हैं

दिया है : त्रिभुज PQR की दो माध्यिकाएँ QE और RF बिंदु G पर मिलती हैं। PG को बढ़ाकर D तक इस तरह बढ़ाओ कि PG = GH हो, और D, QR पर पड़े।

⇒ रचना : PG को H तक बढ़ाया, PG = GH। Q, H और R, H को जोड़ो।

⇒ ΔPQH में F, PQ का मध्यबिंदु है और G, PH का मध्यबिंदु है।

⇒ मध्यबिंदु प्रमेय से FG || QH।

⇒ ΔPRH में E, PR का मध्यबिंदु है और G, PH का मध्यबिंदु है।

⇒ मध्यबिंदु प्रमेय से EG || RH।

⇒ चतुर्भुज QGRH में QG || RH और RG || QH, इसलिए QGRH एक समांतर चतुर्भुज है।

⇒ समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, इसलिए D, QR और GH दोनों का मध्यबिंदु है।

⇒ D, QR का मध्यबिंदु है, इसलिए PD त्रिभुज की तीसरी माध्यिका है और वह भी G से होकर जाती है।

⇒ तीनों माध्यिकाएँ एक ही बिंदु G से जाती हैं, इसलिए वे समबिन्दु हैं।

∴ त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ समबिन्दु हैं

> यही बिंदु G केन्द्रक कहलाता है और वह हर माध्यिका को शीर्ष से 2 : 1 के अनुपात में बाँटता है।

birlaeducation.org

स्वयं करो 17.3 (2) : न्यून, समकोण और अधिक कोण त्रिभुज में केन्द्रक कहाँ है

प्रश्न : न्यून कोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज और अधिक कोण त्रिभुज अलग अलग बनाकर बताओ कि केन्द्रक त्रिभुज के अंदर है, बाहर है या भुजा पर है।

दिया है : तीन तरह के त्रिभुज : न्यून कोण, समकोण और अधिक कोण।

⇒ हर त्रिभुज में माध्यिका शीर्ष को सामने वाली भुजा के मध्यबिंदु से जोड़ती है, इसलिए माध्यिका हमेशा त्रिभुज के अंदर ही रहती है।

⇒ तीनों माध्यिकाएँ एक बिंदु G पर मिलती हैं, जो तीनों माध्यिकाओं पर ही पड़ता है।

⇒ इसलिए G त्रिभुज के अंदर ही पड़ता है, चाहे त्रिभुज न्यून कोण हो, समकोण हो या अधिक कोण हो।

⇒ न्यून कोण त्रिभुज में केन्द्रक अंदर है।

⇒ समकोण त्रिभुज में केन्द्रक अंदर है।

⇒ अधिक कोण त्रिभुज में केन्द्रक अंदर है।

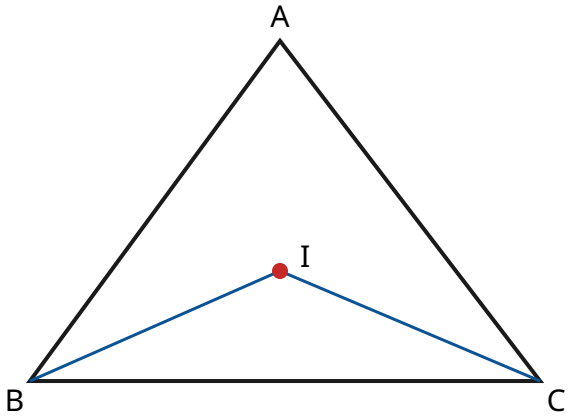
∴ केन्द्रक तीनों तरह के त्रिभुजों में त्रिभुज के अंदर ही होता है

birlaeducation.org

कषे देखी 17

प्रश्न 1 : ∠BIC = 90° + ∠BAC/2 सिद्ध करो

प्रश्न : त्रिभुज ABC के ∠B और ∠C के समद्विभाजक बिंदु I पर मिलते हैं। सिद्ध करो कि ∠BIC = 90° + ∠BAC/2 है।



चित्र 4 : ∠B और ∠C के समद्विभाजक बिंदु I (अंतःकेन्द्र) पर मिलते हैं

दिया है : त्रिभुज ABC में BI और CI क्रमशः ∠B और ∠C के समद्विभाजक हैं, जो I पर मिलते हैं।

⇒ माना ∠ABI = ∠CBI = x और ∠ACI = ∠BCI = y।

⇒ त्रिभुज ABC में : ∠BAC + ∠ABC + ∠ACB = 180°।

⇒ ∠BAC + 2x + 2y = 180°।

⇒ x + y = (180° − ∠BAC)/2 = 90° − ∠BAC/2।

⇒ त्रिभुज BIC में : ∠BIC + ∠IBC + ∠ICB = 180°।

⇒ ∠BIC + x + y = 180°।

⇒ ∠BIC = 180° − (x + y) = 180° − (90° − ∠BAC/2)।

⇒ ∠BIC = 90° + ∠BAC/2।

∴ ∠BIC = 90° + ∠BAC/2 सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

प्रश्न 2 : तीनों माध्यिकाएँ बराबर हों तो त्रिभुज समबाहु है

प्रश्न : यदि किसी त्रिभुज की तीनों माध्यिकाओं की लंबाई बराबर हो, तो सिद्ध करो कि वह त्रिभुज समबाहु त्रिभुज है।

दिया है : त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ AD, BE और CF हैं, AD = BE = CF। माध्यिकाएँ बिंदु G पर मिलती हैं।

⇒ केन्द्रक G हर माध्यिका को 2 : 1 में बाँटता है।

⇒ AG = (2/3)AD, BG = (2/3)BE, CG = (2/3)CF।

⇒ AD = BE = CF, इसलिए AG = BG = CG।

⇒ GD = (1/3)AD, GE = (1/3)BE, GF = (1/3)CF, इसलिए GD = GE = GF।

⇒ ΔBGD और ΔCGE में : BG = CG, GD = GE, ∠BGD = ∠CGE (शीर्षाभिमुख कोण)।

⇒ ΔBGD ≅ ΔCGE (भुजा कोण भुजा सर्वांगसमता से)।

⇒ BD = CE (सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)।

⇒ 2BD = 2CE, अर्थात BC = AC।

⇒ इसी तरह ΔCGD और ΔAGE से CD = AE मिलता है, जिससे CA = AB।

⇒ AB = BC = CA।

∴ त्रिभुज ABC समबाहु त्रिभुज है, सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

प्रश्न 3 : समबाहु त्रिभुज में चारों केन्द्र एक ही बिंदु हैं

प्रश्न : सिद्ध करो कि समबाहु त्रिभुज में परिकेन्द्र, अंतःकेन्द्र, केन्द्रक और लंबकेन्द्र एक ही बिंदु होते हैं।

दिया है : ABC एक समबाहु त्रिभुज है, AB = BC = CA। AD, BC पर A से खींचा गया लंब है।

⇒ ΔABD और ΔACD में : AB = AC, AD उभयनिष्ठ भुजा है, ∠ADB = ∠ADC = 90°।

⇒ ΔABD ≅ ΔACD (समकोण कर्ण भुजा सर्वांगसमता से)।

⇒ BD = CD और ∠BAD = ∠CAD।

⇒ AD, BC की माध्यिका भी है, BC का लंब समद्विभाजक भी है, ∠BAC का समद्विभाजक भी है और A से डाला गया लंब भी है।

⇒ यही बात BE और CF के लिए भी सही है।

⇒ इसलिए माध्यिकाएँ, लंब समद्विभाजक, कोण समद्विभाजक और शीर्षलंब एक ही तीन रेखाएँ हैं।

⇒ इन रेखाओं का प्रतिच्छेद बिंदु एक ही है, इसलिए परिकेन्द्र, अंतःकेन्द्र, केन्द्रक और लंबकेन्द्र एक ही बिंदु हैं।

∴ समबाहु त्रिभुज में चारों केन्द्र एक ही बिंदु पर मिलते हैं, सिद्ध हुआ

प्रश्न 4 : त्रिभुज ABC और DEF का केन्द्रक एक ही बिंदु है

प्रश्न : AD, BE और CF त्रिभुज ABC की तीन माध्यिकाएँ हैं। सिद्ध करो कि त्रिभुज ABC और त्रिभुज DEF का केन्द्रक एक ही बिंदु है, जहाँ D, E, F भुजाओं BC, CA, AB के मध्यबिंदु हैं।

दिया है : त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ AD, BE, CF बिंदु G पर मिलती हैं। D, E, F क्रमशः BC, CA, AB के मध्यबिंदु हैं।

⇒ E और F क्रमशः AC और AB के मध्यबिंदु हैं, इसलिए EF || BC (मध्यबिंदु प्रमेय से)।

⇒ AD, BC की माध्यिका है। EF || BC होने से AD, EF को भी उसके मध्यबिंदु M पर काटती है।

⇒ DM, त्रिभुज DEF की एक माध्यिका है और G, AD पर ही है, इसलिए G, DM पर भी है।

⇒ इसी तरह BE, FD को उसके मध्यबिंदु पर काटती है, इसलिए त्रिभुज DEF की दूसरी माध्यिका भी G से जाती है।

⇒ इसी तरह CF, DE को उसके मध्यबिंदु पर काटती है, इसलिए त्रिभुज DEF की तीसरी माध्यिका भी G से जाती है।

⇒ त्रिभुज DEF की तीनों माध्यिकाएँ G से जाती हैं, इसलिए G ही त्रिभुज DEF का केन्द्रक है।

⇒ त्रिभुज ABC का केन्द्रक G ही त्रिभुज DEF का केन्द्रक है।

∴ त्रिभुज ABC और त्रिभुज DEF का केन्द्रक एक ही बिंदु G है, सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

प्रश्न 5 : दो माध्यिकाएँ मिलकर तीसरी से बड़ी होती हैं

प्रश्न : सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज की कोई दो माध्यिकाएँ मिलकर तीसरी माध्यिका से बड़ी होती हैं।

दिया है : त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ AD, BE, CF बिंदु G पर मिलती हैं।

⇒ रचना : AD को H तक इस तरह बढ़ाओ कि GD = DH हो। B, H और C, H को जोड़ो।

⇒ चतुर्भुज BHCG में BD = DC (AD माध्यिका है) और GD = DH (रचना से)।

⇒ विकर्ण BC और GH एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, इसलिए BHCG एक समांतर चतुर्भुज है।

⇒ BH = CG (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)।

⇒ त्रिभुज BGH में : BG + BH > GH (त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी से बड़ा होता है)।

⇒ BG + CG > GH।

⇒ GH = GD + DH = 2GD और AG : GD = 2 : 1, इसलिए GH = AG।

⇒ BG + CG > AG।

⇒ BG = (2/3)BE, CG = (2/3)CF, AG = (2/3)AD।

⇒ (2/3)BE + (2/3)CF > (2/3)AD।

⇒ BE + CF > AD।

⇒ इसी तरह AD + CF > BE और AD + BE > CF भी सिद्ध होता है।

∴ त्रिभुज की कोई दो माध्यिकाएँ मिलकर तीसरी माध्यिका से बड़ी होती हैं, सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

प्रश्न 6 : माध्यिकाओं और परिमाप के बीच दो असमिकाएँ

प्रश्न : AD, BE और CF त्रिभुज ABC की तीन माध्यिकाएँ हैं। सिद्ध करो कि :

(i) 4(AD + BE + CF) > 3(AB + BC + CA)

(ii) 3(AB + BC + CA) > 2(AD + BE + CF)

दिया है : त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ AD, BE, CF बिंदु G पर मिलती हैं। AG = (2/3)AD, BG = (2/3)BE, CG = (2/3)CF।

(i) त्रिभुज ABG में : AG + BG > AB।

⇒ त्रिभुज BCG में : BG + CG > BC।

⇒ त्रिभुज CAG में : CG + AG > CA।

⇒ तीनों को जोड़ने पर : 2(AG + BG + CG) > AB + BC + CA।

⇒ 2 × (2/3)(AD + BE + CF) > AB + BC + CA।

⇒ (4/3)(AD + BE + CF) > AB + BC + CA।

⇒ 4(AD + BE + CF) > 3(AB + BC + CA)।

(ii) त्रिभुज ABD में : AB + BD > AD, अर्थात AB + BC/2 > AD।

⇒ त्रिभुज BCE में : BC + CE > BE, अर्थात BC + CA/2 > BE।

⇒ त्रिभुज CAF में : CA + AF > CF, अर्थात CA + AB/2 > CF।

⇒ तीनों को जोड़ने पर : (3/2)(AB + BC + CA) > AD + BE + CF।

⇒ 3(AB + BC + CA) > 2(AD + BE + CF)।

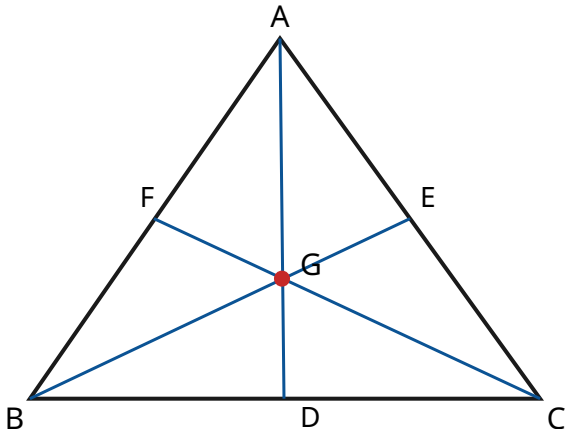
∴ (i) 4(AD + BE + CF) > 3(AB + BC + CA) और (ii) 3(AB + BC + CA) > 2(AD + BE + CF) सिद्ध हुए

bfdaeducation.org

प्रश्न 7 : त्रिभुज का क्षेत्रफल 36 वर्ग सेमी हो तो भागों का क्षेत्रफल

प्रश्न : त्रिभुज ABC की तीन माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिंदु G पर मिलती हैं। त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 36 वर्ग सेमी हो, तो निकालो :

(i) त्रिभुज AGB का क्षेत्रफल (ii) त्रिभुज CGE का क्षेत्रफल (iii) चतुर्भुज BDGF का क्षेत्रफल



चित्र 5 : माध्यिकाएँ त्रिभुज को क्षेत्रफल के 6 बराबर भागों में बाँटती हैं

दिया है : त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = 36 वर्ग सेमी। माध्यिकाएँ AD, BE, CF बिंदु G पर मिलती हैं।

⇒ माध्यिका त्रिभुज को दो बराबर क्षेत्रफल वाले भागों में बाँटती है।

⇒ AD माध्यिका है, इसलिए ΔABD = ΔACD = 18 वर्ग सेमी।

⇒ GD, त्रिभुज GBC की माध्यिका है, इसलिए ΔGBD = ΔGCD।

⇒ ΔAGB = ΔABD − ΔGBD और ΔAGC = ΔACD − ΔGCD, इसलिए ΔAGB = ΔAGC।

⇒ इसी तरह ΔAGB = ΔBGC भी मिलता है।

⇒ ΔAGB = ΔBGC = ΔAGC = (1/3) × 36 = 12 वर्ग सेमी।

⇒ (i) ΔAGB का क्षेत्रफल = 12 वर्ग सेमी।

⇒ (ii) ΔCGE = (1/2) × ΔAGC = (1/2) × 12 = 6 वर्ग सेमी।

⇒ (iii) चतुर्भुज BDGF = ΔBGD + ΔBGF = 6 + 6 = 12 वर्ग सेमी।

∴ (i) 12 वर्ग सेमी (ii) 6 वर्ग सेमी (iii) 12 वर्ग सेमी

तीनों माध्यिकाएँ त्रिभुज को 6 बराबर भागों में बाँटती हैं, हर भाग = 36/6 = 6 वर्ग सेमी। AGB में 2 भाग, CGE में 1 भाग और BDGF में 2 भाग हैं।

birlaeducation.org

प्रश्न 8 : (2/3)AD = BC हो तो दो माध्यिकाओं के बीच का कोण 90° है

प्रश्न : AD, BE और CF त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ हैं। यदि (2/3)AD = BC हो, तो सिद्ध करो कि दो माध्यिकाओं के बीच का कोण 90° है।

दिया है : त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ AD, BE, CF बिंदु G पर मिलती हैं और (2/3)AD = BC है।

⇒ G केन्द्रक है, इसलिए AG : GD = 2 : 1, अर्थात GD = AD/3।

⇒ (2/3)AD = BC से AD/3 = BC/2 मिलता है, इसलिए GD = BC/2।

⇒ D, BC का मध्यबिंदु है, इसलिए BD = DC = BC/2।

⇒ BD = DC = GD।

⇒ ΔBGD में BD = GD, इसलिए ∠GBD = ∠BGD। माना यह कोण x है।

⇒ ΔCGD में CD = GD, इसलिए ∠GCD = ∠CGD। माना यह कोण y है।

⇒ ΔBGD में : x + x + ∠BDG = 180°, इसलिए ∠BDG = 180° − 2x।

⇒ ΔCGD में : y + y + ∠CDG = 180°, इसलिए ∠CDG = 180° − 2y।

⇒ ∠BDG + ∠CDG = 180° (एक ही रेखा पर बने कोण), इसलिए (180° − 2x) + (180° − 2y) = 180°।

⇒ 2x + 2y = 180°, इसलिए x + y = 90°।

⇒ ΔBGC में : ∠BGC = 180° − (x + y) = 180° − 90° = 90°।

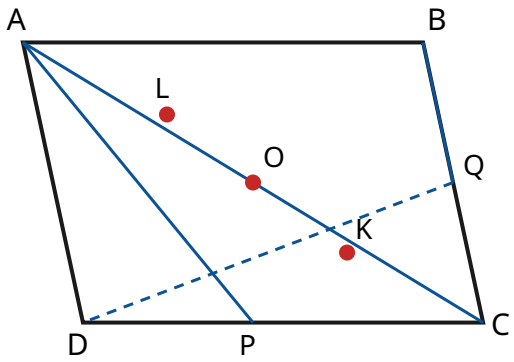
⇒ ∠BGC ही माध्यिकाओं BE और CF के बीच का कोण है।

birlaeducation.org

∴ दो माध्यिकाओं के बीच का कोण 90° है, सिद्ध हुआ

प्रश्न 9 : समांतर चतुर्भुज में BK = KL = LD सिद्ध करो

प्रश्न : समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं BC और CD के मध्यबिंदु क्रमशः P और Q हैं। AP और AQ विकर्ण BD को क्रमशः K और L पर काटते हैं। सिद्ध करो कि BK = KL = LD है।



चित्र 6 : समांतर चतुर्भुज ABCD, AP और AQ विकर्ण BD को K और L पर काटते हैं

दिया है : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। P, BC का और Q, CD का मध्यबिंदु है। AP, BD को K पर और AQ, BD को L पर काटती है।

⇒ समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। AC और BD बिंदु O पर मिलते हैं, इसलिए BO = DO।

⇒ त्रिभुज ADC में DO और AQ दो माध्यिकाएँ हैं (O, AC का मध्यबिंदु है; Q, CD का मध्यबिंदु है), जो L पर मिलती हैं।

⇒ L, त्रिभुज ADC का केन्द्रक है, इसलिए DL : LO = 2 : 1।

⇒ DL = (2/3)DO और LO = (1/3)DO।

⇒ त्रिभुज ABC में AP और BO दो माध्यिकाएँ हैं (P, BC का मध्यबिंदु है; O, AC का मध्यबिंदु है), जो K पर मिलती हैं।

⇒ K, त्रिभुज ABC का केन्द्रक है, इसलिए BK : KO = 2 : 1।

⇒ BK = (2/3)BO = (2/3)DO और KO = (1/3)DO (क्योंकि BO = DO)।

⇒ KL = KO + LO = (1/3)DO + (1/3)DO = (2/3)DO।

⇒ BK = KL = LD = (2/3)DO।

∴ BK = KL = LD सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

प्रश्न 10 : बहुविकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.)

प्रश्न : सही उत्तर चुनो :

(i) O, त्रिभुज ABC का परिकेन्द्र है; ∠BOC = 80° हो, तो ∠BAC कितना है : (a) 40° (b) 160° (c) 130° (d) 110°

(ii) O, त्रिभुज ABC का लंबकेन्द्र है; ∠BAC = 40° हो, तो ∠BOC कितना है : (a) 80° (b) 140° (c) 110° (d) 40°

(iii) O, त्रिभुज ABC का अंत:केन्द्र है; ∠BAC = 40° हो, तो ∠BOC कितना है : (a) 80° (b) 110° (c) 140° (d) 40°

(iv) G, त्रिभुज ABC का केन्द्रक है; त्रिभुज GBC का क्षेत्रफल 12 वर्ग सेमी हो, तो त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल कितना है : (a) 24 वर्ग सेमी (b) 6 वर्ग सेमी (c) 36 वर्ग सेमी (d) इनमें से कोई नहीं

(v) समकोण त्रिभुज की परित्रिज्या 5 सेमी हो, तो कर्ण की लंबाई कितनी है : (a) 2.5 सेमी (b) 10 सेमी (c) 5 सेमी (d) इनमें से कोई नहीं

(i) परिकेन्द्र के लिए ∠BOC = 2∠BAC।

⇒ ∠BAC = ∠BOC/2 = 80°/2 = 40°।

⇒ उत्तर : (a) 40°।

(ii) लंबकेन्द्र के लिए ∠BOC = 180° − ∠BAC।

⇒ ∠BOC = 180° − 40° = 140°।

⇒ उत्तर : (b) 140°।

(iii) अंत:केन्द्र के लिए ∠BOC = 90° + ∠BAC/2।

⇒ ∠BOC = 90° + 40°/2 = 90° + 20° = 110°।

⇒ उत्तर : (b) 110°।

(iv) केन्द्रक से ΔAGB = ΔBGC = ΔCGA = (1/3)ΔABC।

⇒ ΔABC = 3 × ΔGBC = 3 × 12 = 36 वर्ग सेमी।

⇒ उत्तर : (c) 36 वर्ग सेमी।

(v) समकोण त्रिभुज में परित्रिज्या = कर्ण/2।

⇒ कर्ण = 2 × 5 = 10 सेमी।

⇒ उत्तर : (b) 10 सेमी।

∴ (i) (a) 40° (ii) (b) 140° (iii) (b) 110° (iv) (c) 36 वर्ग सेमी (v) (b) 10 सेमी

birlaeducation.org

प्रश्न 11 : संक्षिप्त उत्तर वाले प्रश्न

प्रश्न :

(i) किसी त्रिभुज की भुजाएँ 6 सेमी, 8 सेमी और 10 सेमी हों, तो उसका परिकेन्द्र कहाँ है, लिखो।

(ii) समबाहु त्रिभुज ABC की माध्यिका AD है और G केन्द्रक है। भुजा की लंबाई $3\sqrt{3}$ सेमी हो, तो AG की लंबाई लिखो।

(iii) त्रिभुज की भुजाओं से समान दूरी पर कितने बिंदु होते हैं, लिखो।

(iv) ABC एक समबाहु त्रिभुज है और DEF उसका पाद त्रिभुज है। ∠FDA का मान लिखो।

(v) ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें ∠ABC = ∠ACB है और माध्यिका AD = BC/2 है। AB = $\sqrt{2}$ सेमी हो, तो परित्रिज्या की लंबाई लिखो।

(i) दिया है : भुजाएँ 6 सेमी, 8 सेमी, 10 सेमी।

⇒ $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$, इसलिए त्रिभुज समकोण है और 10 सेमी कर्ण है।

⇒ समकोण त्रिभुज का परिकेन्द्र कर्ण के मध्यबिंदु पर होता है।

⇒ परिकेन्द्र 10 सेमी लंबी भुजा के मध्यबिंदु पर है।

(ii) दिया है : समबाहु त्रिभुज की भुजा = $3\sqrt{3}$ सेमी।

⇒ माध्यिका AD = $(\sqrt{3}/2) \times$ भुजा = $(\sqrt{3}/2) \times 3\sqrt{3} = 9/2$ सेमी।

⇒ AG = $(2/3)$AD = $(2/3) \times (9/2) = 3$ सेमी।

(iii) दिया है : त्रिभुज की तीनों भुजाओं से समान दूरी पर स्थित बिंदु।

⇒ कोणों के समद्विभाजक एक ही बिंदु (अंतःकेन्द्र) पर मिलते हैं और वही बिंदु तीनों भुजाओं से समान दूरी पर होता है।

⇒ ऐसा केवल 1 बिंदु होता है।

(iv) दिया है : ABC समबाहु है, D, E, F शीर्षलंबों के पाद बिंदु हैं, DEF पाद त्रिभुज है।

⇒ DEF भी समबाहु त्रिभुज है, इसलिए ∠FDE = 60°।

⇒ AD, ∠FDE का समद्विभाजक है, इसलिए ∠FDA = 60°/2 = 30°।

(v) दिया है : AB = AC = $\sqrt{2}$ सेमी, AD माध्यिका है और AD = BC/2।

⇒ BD = DC = BC/2 = AD, इसलिए AD, BC पर लंब है।

⇒ समकोण त्रिभुज ADB में : $AD^2 + BD^2 = AB^2$।

⇒ $AD^2 + AD^2 = (\sqrt{2})^2$, इसलिए $2AD^2 = 2$, AD = 1 सेमी।

⇒ BC = 2AD = 2 सेमी और त्रिभुज A पर समकोण है।

⇒ परित्रिज्या = BC/2 = 1 सेमी।

∴ (i) कर्ण के मध्यबिंदु पर (ii) AG = 3 सेमी (iii) 1 बिंदु (iv) ∠FDA = 30° (v) परित्रिज्या = 1 सेमी

birlaeducation.org

परीक्षा में ध्यान देने वाली बातें

बच्चों की 4 आम ग़लतियाँ :

1. परिकेन्द्र और अंतःकेन्द्र को आपस में बदल देना : परिकेन्द्र शीर्षों से समान दूरी पर होता है, अंतःकेन्द्र भुजाओं से।
2. केन्द्रक का अनुपात उलट देना : AG : GD = 2 : 1 होता है, 1 : 2 नहीं।
3. अधिक कोण त्रिभुज में परिकेन्द्र को अंदर मान लेना : वह बाहर होता है।
4. माध्यिका वाले क्षेत्रफल में 6 भाग भूल जाना : हर छोटा भाग पूरे क्षेत्रफल का 1/6 होता है।

आख़िरी जाँच की आदत : हर प्रश्न में पहले देखो कि कौन सा केन्द्र पूछा गया है, फिर उसका सूत्र लगाओ : परिकेन्द्र के लिए $\angle BOC = 2\angle A$, लंबकेन्द्र के लिए $\angle BOC = 180° - \angle A$, अंतःकेन्द्र के लिए $\angle BIC = 90° + \angle A/2$।

birlaeducation.org