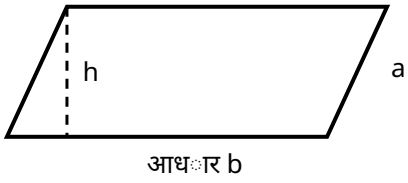
कक्षा 9 गणित — WBBSE (माध्यमिक)

अध्याय 15 : त्रिभुज और चतुर्भुज का परिमाप और क्षेत्रफल

कषे देखि 15.3 — **सारे सूत्र** (हर सूत्र के साथ 15.3 के प्रश्न का उदाहरण)

15.3 के सारे 18 प्रश्न इन्हीं सूत्रों से बनते हैं।

1. समांतर चतुर्भुज (Parallelogram)



समांतर चतुर्भुज — आधार b, ऊँचाई h, आसन्न भुजा a

क्षेत्रफल

क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई = b × h

उदाहरण (प्रश्न 1) : आधार 5 सेमी, ऊँचाई 4 सेमी ⇒ क्षेत्रफल = 5 × 4 = **20 वर्ग सेमी**

परिमाप

परिमाप = 2 × (आसन्न भुजाओं का योग) = 2(a + b)

उदाहरण : भुजाएँ 15 मी और 13 मी ⇒ परिमाप = 2 × (15 + 13) = **56 मी**

ऊँचाई या आधार निकालना

ऊँचाई = क्षेत्रफल ÷ आधार ｜ आधार = क्षेत्रफल ÷ ऊँचाई

उदाहरण (प्रश्न 2) : आधार = 2 × ऊँचाई, क्षेत्रफल 98 ⇒ 2h × h = 98 ⇒ $h^2 = 49$ ⇒ **ऊँचाई 7 सेमी, आधार 14 सेमी**

विकर्ण से क्षेत्रफल (हीरोन के साथ)

क्षेत्रफल = 2 × (दो भुजाओं और विकर्ण से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल)

उदाहरण (प्रश्न 3) : भुजाएँ 15 मी, 13 मी, विकर्ण 14 मी ⇒ त्रिभुज का क्षेत्रफल (हीरोन से) 84 ⇒ समांतर चतुर्भुज = 2 × 84 = **168 वर्ग मी**

उदाहरण (प्रश्न 4) : भुजाएँ 25, 15, विकर्ण 20 ⇒ त्रिभुज 150 ⇒ समांतर चतुर्भुज 300 ⇒ 25 वाली भुजा पर ऊँचाई =

300 ÷ 25 = **12 सेमी**

उदाहरण (प्रश्न 18-1) : क्षेत्रफल 96, विकर्ण 12 ⇒ ½ × 12 × लंब = 48 ⇒ विकर्ण पर लंब = **8 सेमी**

दो भुजाओं के बीच की दूरी (एक ही क्षेत्रफल, दो तरीके)

एक भुजा × उसकी दूरी = दूसरी भुजा × उसकी दूरी

उदाहरण (प्रश्न 5) : भुजाएँ 15 और 12, छोटी भुजा (12) की दूरी 7.5 ⇒ क्षेत्रफल = 12 × 7.5 = 90 ⇒ बड़ी भुजा की दूरी = 90 ÷ 15 = **6 सेमी**

उदाहरण (प्रश्न 18-2) : भुजाएँ 5 और 3, बड़ी भुजा की दूरी 2 ⇒ क्षेत्रफल = 5 × 2 = 10 ⇒ छोटी भुजा की दूरी = 10 ÷ 3 = **3⅓ सेमी**

कोण से क्षेत्रफल

क्षेत्रफल = (आसन्न भुजाओं का गुणनफल) × sin(बीच का कोण) = a × b × sin θ

उदाहरण (प्रश्न 18-5) : भुजाएँ 4 और 6, कोण 30° ⇒ क्षेत्रफल = 4 × 6 × sin 30° = 24 × ½ = **12 वर्ग सेमी**

2. हीरोन का सूत्र (Heron's Formula) — त्रिभुज का क्षेत्रफल

s = (a + b + c) ÷ 2 | क्षेत्रफल = √[s(s − a)(s − b)(s − c)]

उदाहरण (प्रश्न 3 और 11) : भुजाएँ 13, 14, 15 ⇒ s = 21 ⇒ क्षेत्रफल = √(21 × 8 × 7 × 6) = √7056 = **84**

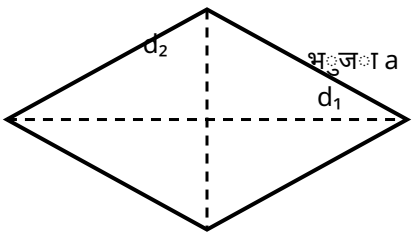
उदाहरण (प्रश्न 4) : भुजाएँ 25, 15, 20 ⇒ s = 30 ⇒ क्षेत्रफल = √(30 × 5 × 15 × 10) = **150**

त्रिभुज का साधारण सूत्र

क्षेत्रफल = ½ × आधार × ऊँचाई

उदाहरण : समकोण त्रिभुज (भुजाएँ 5, 12) ⇒ क्षेत्रफल = ½ × 5 × 12 = **30** (प्रश्न 11 में इस्तेमाल हुआ)

3. समचतुर्भुज (Rhombus) — चारों भुजाएँ बराबर



समचतुर्भुज — विकर्ण d_1 और d_2 परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं

विकर्णों से क्षेत्रफल

क्षेत्रफल = ½ × d_1 × d_2

उदाहरण (प्रश्न 6) : विकर्ण 15 और 20 ⇒ क्षेत्रफल = ½ × 15 × 20 = **150 वर्ग मी**

उदाहरण (प्रश्न 8) : एक विकर्ण 6, दूसरा 8 ⇒ क्षेत्रफल = ½ × 6 × 8 = **24 वर्ग सेमी**

भुजा, परिमाप और ऊँचाई

भुजा a = $\sqrt{[(d_1/2)^2 + (d_2/2)^2]}$ | परिमाप = 4 × a | क्षेत्रफल = a × ऊँचाई

उदाहरण (प्रश्न 6) : d_1 = 15, d_2 = 20 ⇒ a = $\sqrt{(7.5^2 + 10^2)}$ = **12.5 मी** ⇒ परिमाप = 4 × 12.5 = **50 मी** ⇒ ऊँचाई = 150 ÷ 12.5 = **12 मी**

उदाहरण (प्रश्न 7) : परिमाप 440 ⇒ भुजा = 440 ÷ 4 = 110 ⇒ क्षेत्रफल = 110 × 22 = **2420 वर्ग मी**

उदाहरण (प्रश्न 18-3) : भुजा 5, ऊँचाई 14 ⇒ क्षेत्रफल = 5 × 14 = **70 वर्ग सेमी**

एक विकर्ण से दूसरा विकर्ण (पाइथागोरस से)

$(d_2/2)^2 = a^2 - (d_1/2)^2$

उदाहरण (प्रश्न 8) : परिमाप 20 ⇒ भुजा 5; एक विकर्ण 6 ⇒ आधा 3 ⇒ दूसरा आधा = $\sqrt{(25 - 9)}$ = 4 ⇒ दूसरा विकर्ण = **8 सेमी**

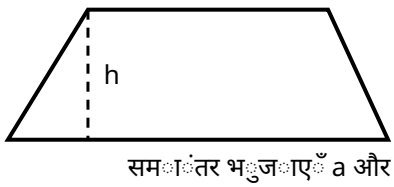
उदाहरण (प्रश्न 14) : भुजा 40, विकर्णों का अनुपात 3:4 ⇒ विकर्ण 48 और 64 ⇒ क्षेत्रफल = ½ × 48 × 64 = **1536 वर्ग सेमी**

60° वाला विशेष समचतुर्भुज

एक कोण 60° हो तो समचतुर्भुज दो समबाहु त्रिभुजों में बँटता है

उदाहरण (प्रश्न 17-2) : भुजा 6, कोण 60° ⇒ क्षेत्रफल = 2 × ($\sqrt{3}$/4 × 36) = **18$\sqrt{3}$ वर्ग सेमी**

4. समलंब (Trapezium) — एक जोड़ी समांतर भुजाएँ



समलंब — समांतर भुजाएँ a और b, उनके बीच की दूरी h

क्षेत्रफल

क्षेत्रफल = ½ × (समांतर भुजाओं का योग) × ऊँचाई = ½ × (a + b) × h

उदाहरण (प्रश्न 9) : क्षेत्रफल 1400, h = 20, भुजाओं का अनुपात 3:4 ⇒ ½ × 7x × 20 = 1400 ⇒ x = 20 ⇒ भुजाएँ **60 और 80 डेसीमीटर**

उदाहरण (प्रश्न 17-5) : क्षेत्रफल 162, h = 6, एक भुजा 23 ⇒ ½ × (23 + x) × 6 = 162 ⇒ दूसरी भुजा = **31 सेमी**

विकर्ण और लंबों से क्षेत्रफल

क्षेत्रफल = ½ × विकर्ण × (दोनों लंबों का योग) = ½ × d × (h_1 + h_2)

उदाहरण (प्रश्न 12) : विकर्ण 11, लंब 5 और 11 ⇒ क्षेत्रफल = ½ × 11 × (5 + 11) = **88 वर्ग सेमी**

समद्विबाहु समलंब — ऊँचाई और विकर्ण

ऊँचाई = √(तिरछी भुजा² − कटान²) | विकर्ण = √(AF² + ऊँचाई²)

उदाहरण (प्रश्न 15) : तिरछी भुजाएँ 10, समांतर भुजाएँ 5 और 17 ⇒ कटान = (17 − 5) ÷ 2 = 6 ⇒ ऊँचाई = √(100 − 36) = **8 सेमी** ⇒ क्षेत्रफल = ½ × (5 + 17) × 8 = **88 वर्ग सेमी** ⇒ विकर्ण = √(11^2 + 8^2) = **√185 सेमी**

उदाहरण (प्रश्न 16) : समांतर भुजाएँ 19 और 9, तिरछी भुजाएँ 6 और 8 ⇒ ऊँचाई = **4.8 सेमी** ⇒ क्षेत्रफल = **67.2 वर्ग सेमी**

45° वाला समलंब

कोण 45° हो तो ऊँचाई = तिरछी भुजा ÷ √2

उदाहरण (प्रश्न 18-4) : तिरछी भुजा 62, कोण 45° ⇒ ऊँचाई = 62 ÷ √2 = **31√2 सेमी**

5. सम षट्भुज (Regular Hexagon)

क्षेत्रफल = 6 × (समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल) = 6 × (√3/4 × a^2) = (3√3/2) × a^2

उदाहरण (प्रश्न 10) : भुजा 8 ⇒ क्षेत्रफल = 6 × (√3/4 × 64) = **96√3 वर्ग सेमी**

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल (याद रखो)

क्षेत्रफल = (√3/4) × a^2

उदाहरण : भुजा 6 ⇒ क्षेत्रफल = (√3/4) × 36 = **9√3** (प्रश्न 17-2 में इस्तेमाल हुआ)

6. सामान्य चतुर्भुज और पंचभुज — टुकड़ों में बाँटो

चतुर्भुज का क्षेत्रफल

क्षेत्रफल = विकर्ण से बने दो त्रिभुजों का योग

उदाहरण (प्रश्न 11) : भुजाएँ 5, 12, 14, 15, ∠B = 90° ⇒ विकर्ण AC = √(25 + 144) = 13 ⇒ ΔABC = ½ × 5 × 12 = 30, ΔADC (हीरोन से) = 84 ⇒ कुल = **114 वर्ग मी**

पंचभुज का क्षेत्रफल

क्षेत्रफल = समलंब का क्षेत्रफल + त्रिभुज का क्षेत्रफल

उदाहरण (प्रश्न 13) : समलंब 40 + त्रिभुज 32.5 = **72.5 वर्ग सेमी**

7. सहायक सूत्र (इनके बिना 15.3 नहीं बनेगा)

पाइथागोरस प्रमेय

कर्ण² = आधार² + लंब² ($c^2 = a^2 + b^2$)

उदाहरण : $5^2 + 12^2 = 13^2$ ⇒ कर्ण 13 (प्रश्न 11); $3^2 + 4^2 = 5^2$ (प्रश्न 8)

वर्ग का विकर्ण

विकर्ण = भुजा × √2

उदाहरण (प्रश्न 14) : विकर्ण 40√2 ⇒ भुजा = 40√2 ÷ √2 = **40 सेमी**

समचतुर्भुज और वर्ग एक ही आधार पर

वर्ग का क्षेत्रफल > समचतुर्भुज का क्षेत्रफल (एक ही आधार पर)

उदाहरण (प्रश्न 17-4) : वर्ग का क्षेत्रफल x^2 और समचतुर्भुज का y हो, तो **$y < x^2$**

परीक्षा में याद रखने की तरकीब : 15.3 में सबसे पहले देखो — कौन सी आकृति है? समांतर चतुर्भुज हो तो आधार × ऊँचाई, समचतुर्भुज हो तो ½ × विकर्ण × विकर्ण, समलंब हो तो ½ × (योग) × ऊँचाई। भुजाएँ और विकर्ण दिए हों तो हीरोन लगेगा, और विकर्ण निकालना हो तो पाइथागोरस।