कक्षा 9 गणित — WBBSE (माध्यमिक)

अध्याय 15 : त्रिभुज और चतुर्भुज का क्षेत्रफल और परिमाप

अभ्यास 15.2 — परीक्षा-शैली में पूरा हल (हिंदी में)

हर प्रश्न अपने अलग बॉक्स में है, ठीक वैसे ही जैसे परीक्षा की कॉपी में लिखा जाता है :

प्रश्न → चित्र → दिया है → माना → सूत्र और गणना → ∴ उत्तर

पहले ये सूत्र याद कर लें

आकृति	क्षेत्रफल	परिमाप / अन्य
त्रिभुज	½ × आधार × ऊँचाई	a + b + c
समबाहु त्रिभुज (भुजा a)	$(\sqrt{3}/4)a^2$	परिमाप = 3a, ऊँचाई = $(\sqrt{3}/2)a$
समद्विबाहु त्रिभुज (बराबर भुजा b, आधार a)	ऊँचाई = $\sqrt{(b^2 - a^2/4)}$, क्षेत्रफल = $(a/4)\sqrt{(4b^2 - a^2)}$	
हीरोन सूत्र (भुजाएँ a, b, c)	s = (a+b+c)/2, क्षेत्रफल = $\sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$	
समकोण त्रिभुज	½ × (लंब भुजाओं का गुणनफल)	कर्ण = $\sqrt{(a^2 + b^2)}$
समांतर चतुर्भुज	आधार × ऊँचाई	2 × (लंबाई + चौड़ाई)
समचतुर्भुज (विकर्ण d_1, d_2)	½ × d_1 × d_2	परिमाप = 4 × भुजा
समलंब (ट्रैपीज़ियम)	½ × (समानांतर भुजाओं का योग) × ऊँचाई	चारों भुजाओं का योग
आयत	लंबाई × चौड़ाई	विकर्ण = $\sqrt{(l^2 + b^2)}$
वर्ग (भुजा a)	a^2	विकर्ण = $a\sqrt{2}$
चतुर्भुज (विकर्ण d, लंब h_1, h_2)	½ × d × (h_1 + h_2)	

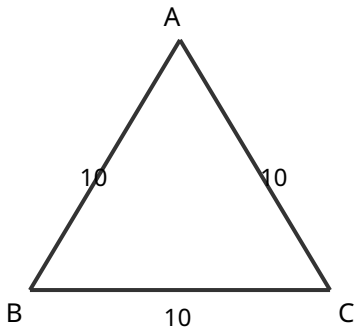
याद रखो : क्षेत्रफल हमेशा वर्ग इकाई (वर्ग सेमी) में लिखो, परिमाप इकाई (सेमी) में। इकाई भूलना परीक्षा में अंक कटवाता है।

प्रश्न-दर-प्रश्न हल

प्रश्न 1 — चित्र देखकर क्षेत्रफल लिखिए

प्रश्न : दिए गए चित्रों को देखकर प्रत्येक क्षेत्र का क्षेत्रफल हिसाब करके लिखिए।

(1) समबाहु त्रिभुज, हर भुजा 10 सेमी



चित्र 1 — समबाहु त्रिभुज, हर भुजा = 10 सेमी

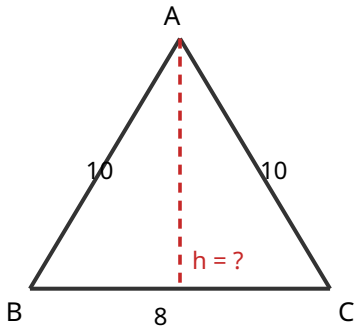
दिया है : हर भुजा a = 10 सेमी।

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $(\sqrt{3}/4)a^2$

= $(\sqrt{3}/4) \times 10^2 = (\sqrt{3}/4) \times 100 = 25\sqrt{3}$ वर्ग सेमी।

∴ (1) का क्षेत्रफल = $25\sqrt{3}$ वर्ग सेमी

(2) समद्विबाहु त्रिभुज : बराबर भुजाएँ 10 सेमी, आधार 8 सेमी



चित्र 2 — आधार 8 सेमी, बराबर भुजाएँ 10 सेमी

दिया है : बराबर भुजा = 10 सेमी, आधार = 8 सेमी।

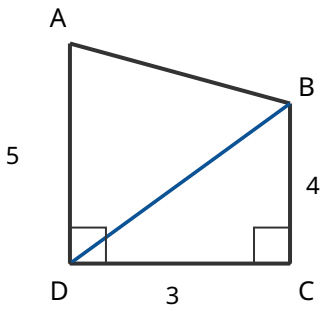
शीर्ष से आधार पर लंब खींचो — समद्विबाहु त्रिभुज में यह लंब आधार को दो बराबर भागों (4 और 4) में बाँटता है।

पाइथागोरस से, ऊँचाई $h^2 = 10^2 - 4^2 = 100 - 16 = 84 \Rightarrow h = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$ सेमी।

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 8 \times 2\sqrt{21} = 4 \times 2\sqrt{21} = 8\sqrt{21}$ वर्ग सेमी।

∴ (2) का क्षेत्रफल = $8\sqrt{21}$ वर्ग सेमी

(3) चतुर्भुज ABCD : ∠ADC = ∠BCD = 90°, AD = 5, BC = 4, DC = 3 सेमी



चित्र 3 — AD और BC दोनों DC पर लंब हैं, इसलिए AD ∥ BC

दिया है : ∠ADC = ∠BCD = 90°, AD = 5 सेमी, BC = 4 सेमी, DC = 3 सेमी।

AD और BC दोनों DC पर लंब हैं ⇒ AD ∥ BC ⇒ ABCD एक **समलंब (trapezium)** है।

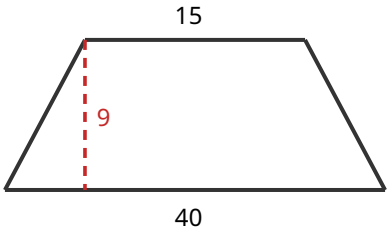
समलंब का क्षेत्रफल = ½ × (समानांतर भुजाओं का योग) × ऊँचाई

= ½ × (5 + 4) × 3 = ½ × 9 × 3 = 13.5 वर्ग सेमी।

∴ (3) का क्षेत्रफल = 13.5 वर्ग सेमी

दूसरा तरीका : विकर्ण DB खींचकर दो त्रिभुज बनाओ — ΔBCD का क्षेत्रफल 6 और ΔABD का 7.5, कुल 6 + 7.5 = 13.5। जो तरीका आसान लगे, वही लिखो।

(4) समलंब : समानांतर भुजाएँ 40 और 15 सेमी, ऊँचाई 9 सेमी



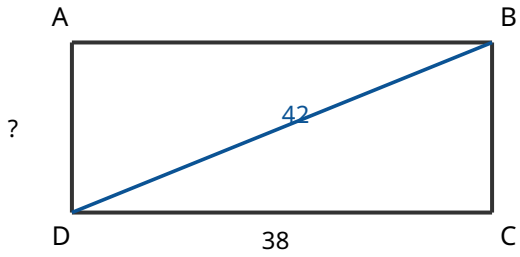
चित्र 4 — समलंब, समानांतर भुजाएँ 40 और 15, ऊँचाई 9

समलंब का क्षेत्रफल = ½ × (समानांतर भुजाओं का योग) × ऊँचाई

= ½ × (40 + 15) × 9 = ½ × 55 × 9 = 247.5 वर्ग सेमी।

∴ (4) का क्षेत्रफल = 247.5 वर्ग सेमी

(5) आयत : लंबाई 38 सेमी, विकर्ण 42 सेमी



चित्र 5 — आयत ABCD, विकर्ण AC = 42 सेमी

दिया है : आयत की लंबाई CD = 38 सेमी, विकर्ण AC = 42 सेमी।

समकोण ΔADC में पाइथागोरस से, $AD^2 = AC^2 - CD^2 = 42^2 - 38^2$

$= (42 + 38)(42 - 38) = 80 \times 4 = 320 \Rightarrow AD = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$ सेमी।

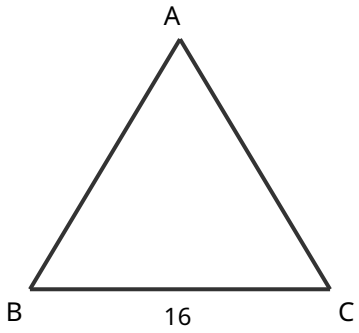
⇒ क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई = $38 \times 8\sqrt{5} = 304\sqrt{5}$ वर्ग सेमी।

∴ (5) का क्षेत्रफल = $304\sqrt{5}$ वर्ग सेमी

> $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ वाली तरकीब याद रखो — 42^2 और 38^2 अलग-अलग निकालने से बड़ी गिनती से बचोगे।

प्रश्न 2 — समबाहु त्रिभुज का परिमाप 48 सेमी

प्रश्न : किसी समबाहु त्रिभुज का परिमाप 48 सेमी है। उसका क्षेत्रफल हिसाब करके लिखिए।



चित्र 6 — समबाहु त्रिभुज, परिमाप 48 ⇒ हर भुजा 16

दिया है : समबाहु त्रिभुज का परिमाप = 48 सेमी।

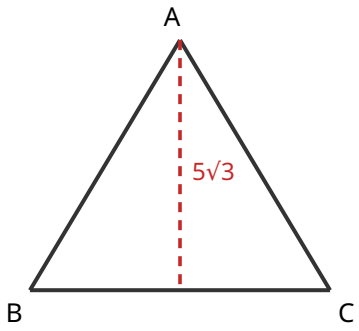
समबाहु त्रिभुज की तीनों भुजाएँ बराबर होती हैं, इसलिए हर भुजा = 48 ÷ 3 = 16 सेमी।

⇒ क्षेत्रफल = $(\sqrt{3}/4) \times 16^2 = (\sqrt{3}/4) \times 256 = 64\sqrt{3}$ वर्ग सेमी।

∴ त्रिभुज का क्षेत्रफल = $64\sqrt{3}$ वर्ग सेमी

प्रश्न 3 — समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई 5√3 सेमी

प्रश्न : समबाहु त्रिभुज ABC की ऊँचाई 5√3 सेमी है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल हिसाब करके लिखिए।



चित्र 7 — ऊँचाई से भुजा निकालो, फिर क्षेत्रफल

दिया है : ऊँचाई h = 5√3 सेमी।

समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई h = (√3/2) × भुजा ⇒ भुजा = (2/√3) × h

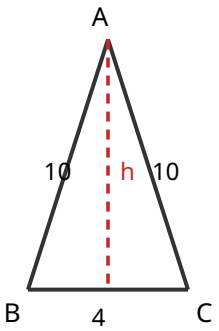
⇒ भुजा = (2/√3) × 5√3 = 10 सेमी।

⇒ क्षेत्रफल = (√3/4) × 10^2 = (√3/4) × 100 = 25√3 वर्ग सेमी।

∴ त्रिभुज का क्षेत्रफल = 25√3 वर्ग सेमी

प्रश्न 4 — समद्विबाहु त्रिभुज : बराबर भुजा 10 सेमी, आधार 4 सेमी

प्रश्न : समद्विबाहु त्रिभुज ABC की हर बराबर भुजा 10 सेमी और आधार 4 सेमी है। ΔABC का क्षेत्रफल हिसाब करके लिखिए।



चित्र 8 — आधार को आधा करो (4 ÷ 2 = 2), फिर पाइथागोरस

दिया है : बराबर भुजा = 10 सेमी, आधार = 4 सेमी।

शीर्ष से आधार पर लंब खींचो — यह लंब आधार को दो बराबर भागों (2 और 2) में बाँटता है।

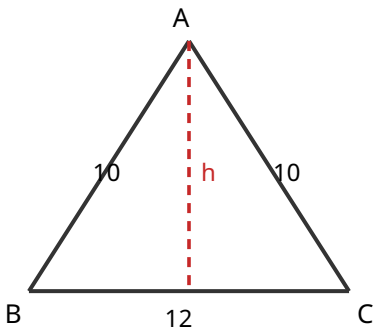
पाइथागोरस से, $h^2 = 10^2 - 2^2 = 100 - 4 = 96 \Rightarrow h = \sqrt{96} = \sqrt{(16 \times 6)} = 4\sqrt{6}$ सेमी।

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{6} = 2 \times 4\sqrt{6} = 8\sqrt{6}$ वर्ग सेमी।

∴ ΔABC का क्षेत्रफल = $8\sqrt{6}$ वर्ग सेमी

प्रश्न 5 — समद्विबाहु त्रिभुज : आधार 12 सेमी, बराबर भुजा 10 सेमी

प्रश्न : किसी समद्विबाहु त्रिभुज के आधार की लंबाई 12 सेमी और हर बराबर भुजा की लंबाई 10 सेमी है। उस त्रिभुज का क्षेत्रफल हिसाब करके लिखिए।



चित्र 9 — आधार का आधा 6, पाइथागोरस से ऊँचाई 8 (6-8-10 त्रिक)

दिया है : आधार = 12 सेमी, बराबर भुजा = 10 सेमी।

शीर्ष से आधार पर लंब खींचो — यह आधार को 6 और 6 में बाँटता है।

पाइथागोरस से, $h^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow h = 8$ सेमी।

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 6 \times 8 = 48$ वर्ग सेमी।

∴ त्रिभुज का क्षेत्रफल = 48 वर्ग सेमी

> प्रश्न 4 और 5 एक जैसे हैं — समद्विबाहु में हमेशा आधार को आधा करके पाइथागोरस लगाओ। यहाँ 6-8-10 त्रिक काम आया।

प्रश्न 6 — समद्विबाहु त्रिभुज : परिमाप 544 सेमी, बराबर भुजा = आधार का 5/6

प्रश्न : किसी समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 544 सेमी है और हर बराबर भुजा आधार की लंबाई का 5/6 है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल हिसाब करके लिखिए।

माना आधार = x सेमी ⇒ हर बराबर भुजा = 5x/6 सेमी।

परिमाप : $x + 5x/6 + 5x/6 = (6x + 5x + 5x)/6 = 16x/6 = 8x/3$

⇒ $8x/3 = 544 \Rightarrow x = 544 \times 3/8 = 68 \times 3 = 204$ सेमी (आधार)।

⇒ बराबर भुजा = $(5/6) \times 204 = 5 \times 34 = 170$ सेमी।

शीर्ष से आधार पर लंब खींचो — यह आधार को 102 और 102 में बाँटता है।

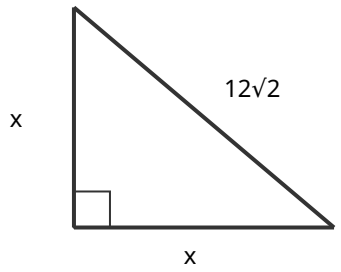
पाइथागोरस से, $h^2 = 170^2 - 102^2 = (170 + 102)(170 - 102) = 272 \times 68 = 18496 \Rightarrow h = 136$ सेमी।

⇒ क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 204 \times 136 = 102 \times 136 = 13872$ वर्ग सेमी।

∴ त्रिभुज का क्षेत्रफल = 13872 वर्ग सेमी

प्रश्न 7 — समद्विबाहु समकोण त्रिभुज : कर्ण 12√2 सेमी

प्रश्न : समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के कर्ण की लंबाई 12√2 सेमी है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल हिसाब करके लिखिए।



चित्र 10 — बराबर भुजाएँ x, कर्ण 12√2

माना हर बराबर भुजा = x सेमी।

समकोण त्रिभुज में कर्ण = $\sqrt{(x^2 + x^2)} = x\sqrt{2}$

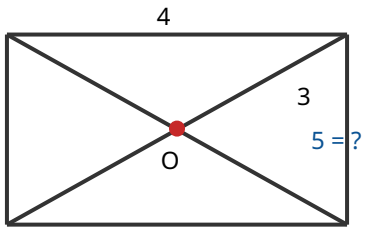
⇒ $x\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \Rightarrow x = 12$ सेमी।

⇒ क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 12 \times 12 = 72$ वर्ग सेमी।

∴ त्रिभुज का क्षेत्रफल = 72 वर्ग सेमी

प्रश्न 8 — समांतर चतुर्भुज : विकर्ण 6 और 8 सेमी, बीच का कोण 90°

प्रश्न : प्रीथा ने एक समांतर चतुर्भुज बनाया जिसके विकर्णों की लंबाई 6 सेमी और 8 सेमी है और विकर्णों के बीच का हर कोण 90° है। समांतर चतुर्भुज की भुजाओं की लंबाई लिखिए और बताइए कि यह किस प्रकार का समांतर चतुर्भुज है।



चित्र 11 — विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं

समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, और यहाँ वे समकोण पर काटते हैं।

⇒ विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं, इसलिए यह **समचतुर्भुज (rhombus)** है।

विकर्णों के आधे भाग : 8/2 = 4 सेमी और 6/2 = 3 सेमी।

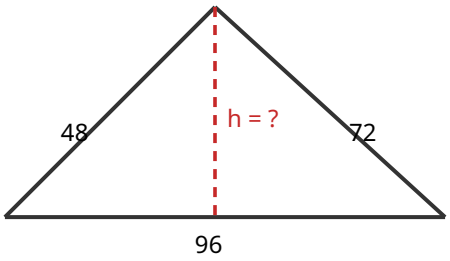
समकोण त्रिभुज में, भुजा^{2} = $4^2 + 3^2$ = 16 + 9 = 25 ⇒ भुजा = 5 सेमी।

⇒ AB = BC = CD = DA = 5 सेमी (समचतुर्भुज की सब भुजाएँ बराबर होती हैं)।

∴ यह समचतुर्भुज है और हर भुजा 5 सेमी है।

प्रश्न 9 — त्रिभुजाकार पार्क : भुजाओं का अनुपात 2:3:4, परिमाप 216 मीटर

प्रश्न : हमारे गाँव के त्रिभुजाकार पार्क की भुजाओं की लंबाई का अनुपात 2:3:4 है और पार्क का परिमाप 216 मीटर है। (1) पार्क का क्षेत्रफल हिसाब करके लिखिए। (2) सबसे लंबी भुजा के सामने वाले शीर्ष से उस भुजा तक सीधे जाने में कितनी दूरी चलनी होगी, यह हिसाब करके लिखिए।



चित्र 12 — भुजाएँ 48, 72, 96 मी; सबसे लंबी भुजा पर लंब-दूरी

माना भुजाएँ 2x, 3x, 4x मी हैं।

परिमाप : 2x + 3x + 4x = 9x = 216 ⇒ x = 24 ⇒ भुजाएँ = 48, 72, 96 मी।

अर्धपरिमाप s = 216/2 = 108 मी।

(1) हीरोन सूत्र से, क्षेत्रफल = √[108(108−48)(108−72)(108−96)] = √(108 × 60 × 36 × 12)

= √(36^2 × 4^2 × 9 × 15) = 36 × 4 × 3 × √15 = 432√15 वर्ग मी।

(2) क्षेत्रफल = ½ × सबसे लंबी भुजा × लंब-दूरी ⇒ लंब-दूरी = (2 × क्षेत्रफल) ÷ सबसे लंबी भुजा

= (2 × 432√15)/96 = 864√15/96 = 9√15 मी।

∴ (1) पार्क का क्षेत्रफल = 432√15 वर्ग मी, (2) चलनी वाली दूरी = 9√15 मी

प्रश्न 10 — त्रिभुजाकार खेत : भुजाएँ 26, 28, 30 मी; घास और बाड़ की लागत

प्रश्न : पहलमपुर गाँव के त्रिभुजाकार खेत की तीनों भुजाओं की लंबाई 26 मी, 28 मी और 30 मी है। (1) ₹5 प्रति वर्ग मी की दर से खेत में घास लगाने की लागत हिसाब करके लिखिए। (2) खेत के प्रवेश द्वार के लिए 5 मी जगह छोड़कर, ₹18 प्रति मी की दर से तीनों तरफ बाड़ लगाने की लागत हिसाब करके लिखिए।

दिया है : भुजाएँ 26 मी, 28 मी, 30 मी।

अर्धपरिमाप $s = (26 + 28 + 30)/2 = 84/2 = 42$ मी।

हीरोन सूत्र से, क्षेत्रफल $= \sqrt{[42(42-26)(42-28)(42-30)]} = \sqrt{(42 \times 16 \times 14 \times 12)}$

$= \sqrt{(14^2 \times 16 \times 36)} = 14 \times 4 \times 6 = 336$ वर्ग मी।

(1) घास की लागत $= 336 \times 5 = ₹1680$।

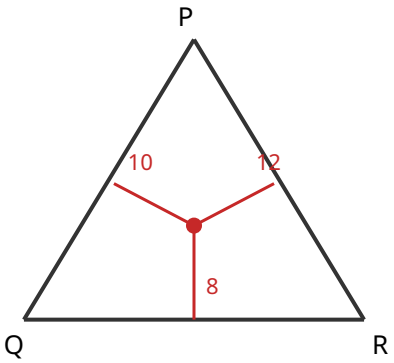
(2) बाड़ की लंबाई = परिमाप − द्वार $= (26 + 28 + 30) - 5 = 84 - 5 = 79$ मी।

⇒ बाड़ की लागत $= 79 \times 18 = ₹1422$।

∴ (1) घास लगाने की लागत = ₹1680, (2) बाड़ लगाने की लागत = ₹1422

प्रश्न 11 — समबाहु त्रिभुज के अंदर बिंदु से तीनों भुजाओं पर लंब 10, 12, 8 सेमी

प्रश्न : शकील ने एक समबाहु त्रिभुज PQR बनाया। मैंने उस समबाहु त्रिभुज के अंदर के एक बिंदु से तीनों भुजाओं पर लंब खींचे, जिनकी लंबाई 10 सेमी, 12 सेमी और 8 सेमी है। त्रिभुज का क्षेत्रफल हिसाब करके लिखिए।



चित्र 13 — अंदर का बिंदु त्रिभुज को 3 छोटे त्रिभुजों में बाँटता है

माना हर भुजा = a सेमी। अंदर का बिंदु O त्रिभुज को 3 त्रिभुजों में बाँटता है :

ΔPQR = ΔPOQ + ΔQOR + ΔPOR

⇒ $(\sqrt{3}/4)a^2 = \frac{1}{2}\cdot a\cdot 10 + \frac{1}{2}\cdot a\cdot 12 + \frac{1}{2}\cdot a\cdot 8 = 5a + 6a + 4a = 15a$

⇒ $(\sqrt{3}/4)a = 15 \Rightarrow a = 60/\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$ सेमी।

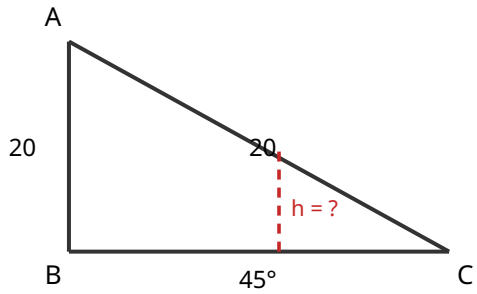
⇒ क्षेत्रफल = $(\sqrt{3}/4) \times (20\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3}/4) \times 1200 = 300\sqrt{3}$ वर्ग सेमी।

∴ त्रिभुज का क्षेत्रफल = $300\sqrt{3}$ वर्ग सेमी

> जादुई तरकीब : तीनों लंबों का योग (10+12+8 = 30) ही समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई होती है — इस तरह के प्रश्नों में सीधे यही काम आता है।

प्रश्न 12 — समद्विबाहु त्रिभुज : बराबर भुजा 20 मी, बीच का कोण 45°

प्रश्न : समद्विबाहु त्रिभुज की हर बराबर भुजा की लंबाई 20 मी है और उनके बीच का कोण 45° है। त्रिभुज का क्षेत्रफल हिसाब करके लिखिए।



चित्र 14 — AB = AC = 20, ∠A = 45°; C से AB पर लंब

दिया है : AB = AC = 20 मी, ∠A = 45°।

C से AB पर लंब CD खींचो — यही CD त्रिभुज की ऊँचाई है।

ΔACD में ∠A = 45° और ∠D = 90° ⇒ ∠C = 45° भी, इसलिए यह समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है ⇒ AD = CD।

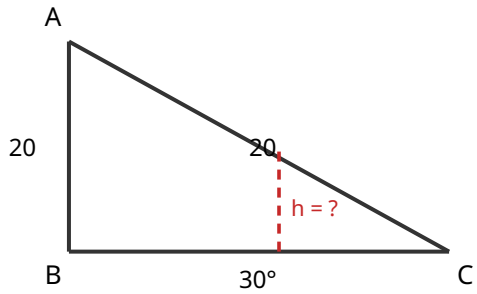
पाइथागोरस से, $AD^2 + CD^2 = AC^2 \Rightarrow 2CD^2 = 400 \Rightarrow CD^2 = 200 \Rightarrow CD = 10\sqrt{2}$ मी।

⇒ क्षेत्रफल = ½ × AB × CD = ½ × 20 × $10\sqrt{2}$ = $100\sqrt{2}$ वर्ग मी।

∴ त्रिभुज का क्षेत्रफल = $100\sqrt{2}$ वर्ग मी

प्रश्न 13 — समद्विबाहु त्रिभुज : बराबर भुजा 20 सेमी, बीच का कोण 30°

प्रश्न : समद्विबाहु त्रिभुज की हर बराबर भुजा की लंबाई 20 सेमी है और उनके बीच का कोण 30° है। त्रिभुज का क्षेत्रफल हिसाब करके लिखिए।



चित्र 15 — AB = AC = 20, ∠A = 30°; C से AB पर लंब

दिया है : AB = AC = 20 सेमी, ∠A = 30°।

C से AB पर लंब CD खींचो। ΔACD में ∠A = 30° है, और 30° के सामने की भुजा कर्ण की आधी होती है।

⇒ CD = ½ × AC = ½ × 20 = 10 सेमी।

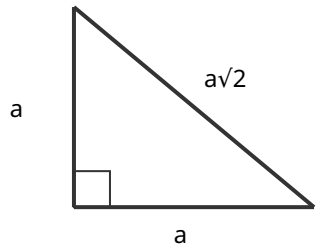
⇒ क्षेत्रफल = ½ × AB × CD = ½ × 20 × 10 = 100 वर्ग सेमी।

∴ त्रिभुज का क्षेत्रफल = 100 वर्ग सेमी

> प्रश्न 12 और 13 जुड़वाँ हैं — 45° में लंब निकालने के लिए पाइथागोरस, 30° में ‘कर्ण का आधा’ वाली तरकीब। दोनों एक ही चित्र से बनते हैं।

प्रश्न 14 — समद्विबाहु समकोण त्रिभुज : परिमाप (√2+1) सेमी

प्रश्न : समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का परिमाप (√2 + 1) सेमी है। कर्ण की लंबाई और त्रिभुज का क्षेत्रफल हिसाब करके लिखिए।



चित्र 16 — बराबर भुजाएँ a, कर्ण a√2

माना हर बराबर भुजा = a सेमी ⇒ कर्ण = a√2 सेमी।

परिमाप = a + a + a√2 = a(2 + √2)

⇒ a(2 + √2) = (√2 + 1) ⇒ a = (√2 + 1)/(2 + √2) = (√2 + 1)/[√2(√2 + 1)] = 1/√2 सेमी।

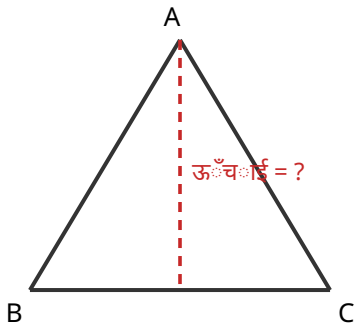
⇒ कर्ण = a√2 = (1/√2) × √2 = 1 सेमी।

⇒ क्षेत्रफल = ½ × a × a = ½ × (1/√2) × (1/√2) = ½ × ½ = 1/4 वर्ग सेमी।

∴ कर्ण = 1 सेमी, क्षेत्रफल = 1/4 वर्ग सेमी

प्रश्न 15 — मारिया : 18 किमी/घंटा से समबाहु खेत का परिमाप 10 मिनट में

प्रश्न : मारिया 18 किमी प्रति घंटा की गति से साइकिल चलाकर समबाहु त्रिभुजाकार खेत का परिमाप 10 मिनट में तय करती है। उसके शीर्ष से सामने वाली भुजा के मध्यबिंदु तक सीधे जाने में कितना समय लगेगा, हिसाब करके लिखिए। (√3 ≈ 1.732)



चित्र 17 — शीर्ष से सामने की भुजा के मध्यबिंदु तक = त्रिभुज की ऊँचाई

10 मिनट = 10/60 = 1/6 घंटा ⇒ तय दूरी = 18 × (1/6) = 3 किमी (= खेत का परिमाप)।

⇒ हर भुजा = 3 ÷ 3 = 1 किमी।

शीर्ष से सामने की भुजा के मध्यबिंदु तक की दूरी = त्रिभुज की ऊँचाई = (√3/2) × 1 = √3/2 किमी।

⇒ समय = दूरी ÷ गति = (√3/2) ÷ 18 घंटा = (√3/36) × 60 मिनट = 5√3/3 मिनट

= (5 × 1.732)/3 = 8.66/3 ≈ 2.89 मिनट।

∴ लगभग 2.89 मिनट लगेगा।

प्रश्न 16 — समबाहु त्रिभुज की भुजा 1 मी बढ़ाने पर क्षेत्रफल √3 बढ़ता है

प्रश्न : समबाहु त्रिभुज की हर भुजा की लंबाई 1 मीटर बढ़ाने पर उसका क्षेत्रफल √3 वर्ग मीटर बढ़ जाता है। समबाहु त्रिभुज की एक भुजा की लंबाई हिसाब करके लिखिए।

माना भुजा = a मी ⇒ पुराना क्षेत्रफल = $(\sqrt{3}/4)a^2$, नया क्षेत्रफल = $(\sqrt{3}/4)(a+1)^2$।

⇒ $(\sqrt{3}/4)(a+1)^2 - (\sqrt{3}/4)a^2 = \sqrt{3}$

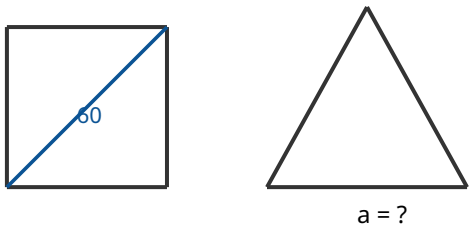
⇒ $(\sqrt{3}/4)[(a+1)^2 - a^2] = \sqrt{3}$ ⇒ $(\sqrt{3}/4)(2a + 1) = \sqrt{3}$

⇒ 2a + 1 = 4 ⇒ 2a = 3 ⇒ a = 1.5 মী।

∴ ভুজা কী লংবাই = 1.5 মীটর

प्रश्न 17 — समबाहु त्रिभुज और वर्ग के क्षेत्रफलों का अनुपात √3:2

प्रश्न : एक समबाहु त्रिभुज और एक वर्ग के क्षेत्रफल का अनुपात √3:2 है। यदि वर्ग के विकर्ण की लंबाई 60 सेमी हो, तो त्रिभुज का परिमाप हिसाब करके लिखिए।



चित्र 18 — वर्ग का विकर्ण 60, त्रिभुज की भुजा a

माना वर्ग की भुजा = x सेमी ⇒ विकर्ण = x√2 = 60 ⇒ x = 60/√2 = 30√2 सेमी।

माना त्रिभुज की भुजा = a सेमी। क्षेत्रफलों का अनुपात √3:2 है, इसलिए

$[(\sqrt{3}/4)a^2] / x^2 = \sqrt{3}/2 \Rightarrow (\sqrt{3}/4)a^2 = (\sqrt{3}/2) \times (30\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3}/2) \times 1800$

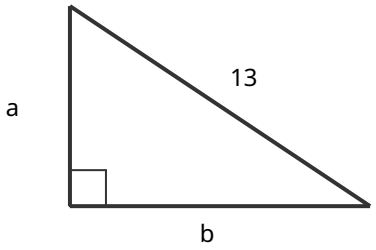
$\Rightarrow a^2/4 = 900 \Rightarrow a^2 = 3600 \Rightarrow a = 60$ सेमी।

⇒ त्रिभुज का परिमाप = 3 × 60 = 180 सेमी।

∴ त्रिभुज का परिमाप = 180 सेमी

प्रश्न 18 — समकोण त्रिभुज : कर्ण 13 सेमी, परिमाप 30 सेमी

प्रश्न : समकोण त्रिभुज के कर्ण की लंबाई 13 सेमी और परिमाप 30 सेमी है। त्रिभुज का क्षेत्रफल हिसाब करके लिखिए।



चित्र 19 — लंब भुजाएँ a और b, कर्ण 13

माना लंब भुजाएँ a और b सेमी हैं।

पाइथागोरस से, $\sqrt{(a^2 + b^2)} = 13 \Rightarrow a^2 + b^2 = 169$ ...(1)

परिमाप से, $a + b + 13 = 30 \Rightarrow a + b = 17 \Rightarrow$ वर्ग करने पर $a^2 + b^2 + 2ab = 289$ ...(2)

(1) को (2) में रखने पर, $169 + 2ab = 289 \Rightarrow 2ab = 120 \Rightarrow ab = 60$

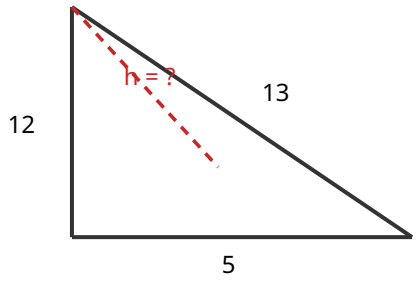
$\Rightarrow$ क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 60 = 30$ वर्ग सेमी।

∴ त्रिभुज का क्षेत्रफल = 30 वर्ग सेमी

> a और b अलग-अलग निकालने की ज़रूरत नहीं — सीधे *ab* निकालो, क्योंकि क्षेत्रफल में वही चाहिए। यही होशियारी परीक्षा में समय बचाती है।

प्रश्न 19 — समकोण शीर्ष से कर्ण पर लंब

प्रश्न : समकोण त्रिभुज की समकोण वाली भुजाओं की लंबाई 12 सेमी और 5 सेमी है। समकोण वाले शीर्ष से कर्ण पर खींचे गए लंब की लंबाई हिसाब करके लिखिए।



चित्र 20 — 5-12-13 त्रिक; समकोण शीर्ष से कर्ण पर लंब

दिया है : समकोण वाली भुजाएँ 12 सेमी और 5 सेमी।

पाइथागोरस से, कर्ण = $\sqrt{(12^2 + 5^2)} = \sqrt{(144 + 25)} = \sqrt{169} = 13$ सेमी।

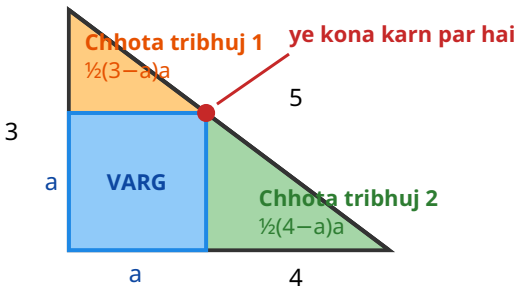
⇒ क्षेत्रफल = ½ × 12 × 5 = 30 वर्ग सेमी।

क्षेत्रफल = ½ × कर्ण × लंब ⇒ लंब = (2 × क्षेत्रफल) ÷ कर्ण = (2 × 30)/13 = 60/13 सेमी ≈ 4.615 सेमी।

∴ लंब की लंबाई = 60/13 सेमी (लगभग 4.615 सेमी)

प्रश्न 20 — 3-4-5 त्रिभुज में कर्ण पर सबसे बड़ा वर्ग

प्रश्न : 3 सेमी, 4 सेमी और 5 सेमी भुजाओं वाले समकोण त्रिभुजाकार क्षेत्र से सबसे बड़ा वर्ग इस तरह काटा गया कि वर्ग का एक शीर्ष त्रिभुज के कर्ण पर हो। वर्ग की भुजा की लंबाई हिसाब करके लिखिए।



चित्र 21 — नीला वर्ग (भुजा a) समकोण शीर्ष पर; नारंगी = छोटा त्रिभुज 1, हरा = छोटा त्रिभुज 2; वर्ग का लाल बिंदु वाला कोना कर्ण पर है

माना वर्ग की भुजा = a सेमी। बड़ा त्रिभुज = वर्ग + 2 छोटे त्रिभुज।

वर्ग समकोण शीर्ष पर है और उसका ऊपर-दायाँ कोना (चित्र में लाल बिंदु) कर्ण पर है — यही प्रश्न की शर्त है।

ΔABC का क्षेत्रफल = ½ × 3 × 4 = 6

दो छोटे त्रिभुजों के क्षेत्रफल : ½(3 − a)a और ½(4 − a)a

⇒ $a^2 = 6 - [\frac{1}{2}(3-a)a + \frac{1}{2}(4-a)a] = 6 - (7a - 2a^2)/2$

⇒ $2a^2 = 12 - 7a + 2a^2 \Rightarrow 7a = 12 \Rightarrow a = 12/7 = 1\frac{5}{7}$ सेमी।

∴ वर्ग की भुजा = 12/7 सेमी

प्रश्न 21 — बहुविकल्पीय प्रश्न (सही उत्तर चुनिए)

प्रश्न :

(1) समबाहु त्रिभुज की हर भुजा 4 सेमी हो, तो ऊँचाई है : (a) $4\sqrt{3}$ (b) $16\sqrt{3}$ (c) $8\sqrt{3}$ (d) $2\sqrt{3}$ सेमी

(2) समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की बराबर भुजाएँ a इकाई हों, तो परिमाप है : (a) $(1+\sqrt{2})a$ (b) $(2+\sqrt{2})a$ (c) $3a$ (d) $(3+2\sqrt{2})a$ इकाई

(3) समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल, परिमाप और ऊँचाई क्रमशः a, s, h हों, तो $2a/(sh)$ का मान है : (a) 1 (b) 1/2 (c) 1/3 (d) 1/4

(4) समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजा 5 सेमी, आधार 6 सेमी हो, तो क्षेत्रफल है : (a) 18 (b) 12 (c) 15 (d) 30 वर्ग सेमी

(5) ΔABC में AC पर बिंदु D इस तरह है कि AD:DC = 3:2। ΔABC का क्षेत्रफल 40 वर्ग सेमी हो, तो ΔBDC का क्षेत्रफल है : (a) 16 (b) 24 (c) 30 (d) 36 वर्ग सेमी

(6) त्रिभुज के अर्धपरिमाप से हर भुजा का अंतर क्रमशः 8, 7, 5 सेमी हो, तो क्षेत्रफल है : (a) $20\sqrt{7}$ (b) $10\sqrt{14}$ (c) $20\sqrt{14}$ (d) 140 वर्ग सेमी

(1) ऊँचाई = $(\sqrt{3}/2) \times 4 = 2\sqrt{3}$ सेमी ⇒ **(d)**

(2) कर्ण = $a\sqrt{2}$ ⇒ परिमाप = $a + a + a\sqrt{2} = (2+\sqrt{2})a$ ⇒ **(b)**

(3) माना भुजा = x ⇒ $2a/(sh) = [2\cdot(\sqrt{3}/4)x^2] / [3x\cdot(\sqrt{3}/2)x] = (\sqrt{3}/2)/(3\sqrt{3}/2) = 1/3$ ⇒ **(c)**

(4) ऊँचाई = $\sqrt{(25 - 9)} = 4$ ⇒ क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$ ⇒ **(b)**

(5) B से AC पर एक ही ऊँचाई ⇒ क्षेत्रफलों का अनुपात = आधारों का अनुपात : $\Delta ABC/\Delta BDC = AC/DC = 5/2$ ⇒ $\Delta BDC = 40 \times 2/5 = 16$ ⇒ **(a)**

(6) $(s-a) + (s-b) + (s-c) = 3s - 2s = s = 8 + 7 + 5 = 20$ ⇒ क्षेत्रफल = $\sqrt{(20 \times 8 \times 7 \times 5)} = \sqrt{5600} = 20\sqrt{14}$ ⇒ **(c)**

∴ उत्तर : (1) d, (2) b, (3) c, (4) b, (5) a, (6) c

प्रश्न 22 — लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न :

(1) समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल और ऊँचाई के संख्यात्मक मान बराबर हैं। त्रिभुज की एक भुजा की लंबाई क्या है?

(2) समबाहु त्रिभुज की हर भुजा दोगुनी कर दी जाए, तो क्षेत्रफल कितने प्रतिशत बढ़ेगा?

(3) समबाहु त्रिभुज की हर भुजा तिगुनी कर दी जाए, तो क्षेत्रफल कितने प्रतिशत बढ़ेगा?

(4) समकोण त्रिभुज की भुजाएँ (x−2) सेमी, x सेमी और (x+2) सेमी हैं। कर्ण की लंबाई कितनी है?

(5) समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई पर एक वर्ग बनाया गया है। त्रिभुज और वर्ग के क्षेत्रफलों का अनुपात क्या है?

(1) माना भुजा = a ⇒ $(\sqrt{3}/4)a^2 = (\sqrt{3}/2)a \Rightarrow a/2 = 1 \Rightarrow a = 2$ इकाई।

(2) भुजा दोगुनी ⇒ क्षेत्रफल 4 गुना ⇒ वृद्धि = (4−1) × 100% = 300%।

(3) भुजा तिगुनी ⇒ क्षेत्रफल 9 गुना ⇒ वृद्धि = (9−1) × 100% = 800%।

(4) सबसे बड़ी भुजा = कर्ण = (x+2) ⇒ $(x+2)^2 = x^2 + (x-2)^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 2x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 8x = 0 \Rightarrow$ x = 8 (x = 0 संभव नहीं) ⇒ कर्ण = 10 सेमी।

(5) त्रिभुज का क्षेत्रफल = $(\sqrt{3}/4)a^2$, ऊँचाई = $(\sqrt{3}/2)a$ ⇒ वर्ग का क्षेत्रफल = $3a^2/4$ ⇒ अनुपात = $(\sqrt{3}/4)a^2 : (3/4)a^2 = \sqrt{3} : 3 = 1 : \sqrt{3}$।

∴ उत्तर : (1) 2 इकाई, (2) 300%, (3) 800%, (4) कर्ण 10 सेमी, (5) 1 : √3

परीक्षा में ध्यान देने वाली बातें

बच्चों की 4 आम ग़लतियाँ :

1. क्षेत्रफल में "वर्ग सेमी" लिखना भूल जाना — अंक कटता है।
2. समद्विबाहु में आधार को आधा किए बिना पाइथागोरस लगा देना।
3. हीरोन सूत्र में अर्धपरिमाप (s) की जगह पूरा परिमाप रख देना।
4. √ के अंदर की संख्या को बिना सरल किए छोड़ देना — जैसे √84 को 2√21 बनाना ही चाहिए।

आख़िरी जाँच की आदत : उत्तर को आँख से तौलो — 10 सेमी भुजा वाले समबाहु का क्षेत्रफल (25√3 ≈ 43) 100 से बड़ा नहीं हो सकता। अगर गिनती में कुछ अजीब लगे, तो सूत्र दोबारा देखो।

नोट : यह दस्तावेज़ मूल व्याख्या और मूल हल है — प्रश्नों को अपने शब्दों में हिंदी में लिखा गया है। अभ्यास अपनी पाठ्यपुस्तक 'गणित प्रकाश' (WBBSE, कक्षा 9, अध्याय 15, अभ्यास 15.2) से साथ रखकर करें।