WBBSE (माध्यमिक)

कक्षा 9 गणित

अध्याय 13

रचना : त्रिभुज के बराबर क्षेत्रफल वाला समांतर चतुर्भुज

birlaeducation.org

Full Solution : पूरा हल

कषे देखी 13

परीक्षा की कॉपी में लिखने जैसा हल, हिंदी में

बिरला एजुकेशन

कक्षा 9 गणित : अध्याय 13

रचना : त्रिभुज के बराबर क्षेत्रफल वाला समांतर चतुर्भुज

कषे देखी 13 : पूरा हल

प्रश्न → चित्र → दिया है → सूत्र और गणना → ∴ उत्तर

अध्याय 13 और अध्याय 14 में फर्क : दोनों अध्यायों का नाम रचना है, पर काम उल्टा है। **अध्याय 13 में त्रिभुज के बराबर क्षेत्रफल वाला समांतर चतुर्भुज** बनाते हैं, और **अध्याय 14 में चतुर्भुज के बराबर क्षेत्रफल वाला त्रिभुज** बनाते हैं। इस अध्याय के सारे प्रश्न त्रिभुज से समांतर चतुर्भुज बनाने के हैं।

पहले ये बातें याद कर लें

त्रिभुज और समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल : त्रिभुज का क्षेत्रफल = 1/2 × आधार × ऊँचाई। समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई। एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने त्रिभुज और समांतर चतुर्भुज में, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल त्रिभुज के क्षेत्रफल का दोगुना होता है।

त्रिभुज के बराबर क्षेत्रफल वाला समांतर चतुर्भुज बनाने की तरकीब

आधार को आधा कर दो, ऊँचाई वही रखो

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = (आधार/2) × ऊँचाई = त्रिभुज का क्षेत्रफल

birlaeducation.org

दिया है : त्रिभुज ABC का आधार BC और ऊँचाई h है।

⇒ त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = 1/2 × BC × h।

⇒ BC का मध्य बिंदु D लो, तो DC = BC/2।

⇒ A से BC के समांतर रेखा खींचो, D पर दिया गया कोण बनाओ, और समांतर रेखा पर DC के बराबर खंड काटो।

⇒ जो समांतर चतुर्भुज बनेगा, उसका आधार DC = BC/2 और ऊँचाई h ही रहेगी।

⇒ समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = DC × h = (BC/2) × h = 1/2 × BC × h।

⇒ यह त्रिभुज ABC के क्षेत्रफल के बराबर है।

समांतर रेखा खींचना क्यों जरूरी है : त्रिभुज के शीर्ष से आधार के समांतर रेखा खींचने से समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई त्रिभुज की ऊँचाई के बराबर रहती है। ऊँचाई बदल गई तो क्षेत्रफल भी बदल जाएगा। इसीलिए पहले समांतर रेखा खींचो, फिर कोण बनाओ।

परकार से कोण की नकल कैसे करें : दिए गए कोण के शीर्ष को केंद्र मानकर एक चाप काटो जो कोण की दोनों भुजाओं को काटे। फिर उसी त्रिज्या से नई जगह पर चाप काटो और पहली चाप की जीवा के बराबर दूरी नापकर दूसरी चाप पर बिंदु लगाओ। बिंदु को शीर्ष से जोड़ दो, कोण की नकल तैयार है।

ध्यान दो : समांतर चतुर्भुज बनाते समय आधार को आधा करना मत भूलो। पूरा आधार लोगे तो समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल त्रिभुज से दोगुना हो जाएगा। और कोण हमेशा उसी बिंदु पर बनाओ जहाँ आधार का मध्य बिंदु है, वरना ऊँचाई बदल जाएगी।

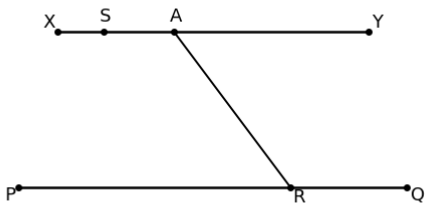
birlaeducation.org

कषे देखी 13

birlaeducation.org

प्रश्न 1 : बाहरी बिंदु से समांतर रेखा खींचो (तीन तरीके)

प्रश्न : 5 सेमी लंबा रेखाखंड PQ खींचो। PQ के बाहर एक बिंदु A लो। A से होकर PQ के समांतर रेखा तीन अलग अलग तरीकों से खींचो।



चित्र 1 : बिंदु A से PQ के समांतर रेखा XY, एकांतर कोण बराबर करके

पहली विधि (एकांतर कोण से) :

दिया है : रेखाखंड PQ = 5 सेमी, उसके बाहर बिंदु A है।

⇒ पहले पैमाने से PQ = 5 सेमी खींचो और उसके बाहर बिंदु A लो।

⇒ फिर PQ पर कोई बिंदु R लो और A को R से जोड़ो।

⇒ इसके बाद A पर ∠ARQ के बराबर कोण ∠SAR, AR के दूसरी ओर बनाओ।

⇒ S और A को जोड़कर दोनों ओर बढ़ाओ, रेखा XY मिलेगी।

⇒ ∠SAR = ∠ARQ (एकांतर कोण), इसलिए XY ∥ PQ।

दूसरी विधि (संगत कोण से) :

⇒ पहले PQ = 5 सेमी खींचो और उसके बाहर बिंदु A लो।

⇒ फिर PQ पर कोई बिंदु D लो और D को A से जोड़ो।

⇒ इसके बाद DA को E तक बढ़ाओ, तो ∠ADQ बनेगा।

⇒ फिर EA पर A बिंदु पर ∠ADQ के बराबर कोण ∠EAB, AD के उसी ओर बनाओ।

⇒ B से होकर रेखा को बढ़ाओ, रेखा RB मिलेगी।

⇒ ∠EAB = ∠ADQ (संगत कोण), इसलिए RB ∥ PQ।

तीसरी विधि (समांतर चतुर्भुज से) :

⇒ पहले PQ = 5 सेमी खींचो और उसके बाहर बिंदु A लो।

⇒ फिर PQ पर कोई बिंदु B लो और B को A से जोड़ो।

⇒ इसके बाद BQ पर BO खंड काटो।

⇒ फिर O को केंद्र मानकर BA के बराबर त्रिज्या से एक चाप काटो।

⇒ इसके बाद A को केंद्र मानकर BO के बराबर त्रिज्या से दूसरा चाप काटो, जो पहले चाप को R पर काटे।

⇒ A और R को जोड़कर दोनों ओर बढ़ाओ, रेखा MN मिलेगी।

bindeducation.org

⇒ चतुर्भुज ABOR में AB = OR और BO = AR है, इसलिए ABOR समांतर चतुर्भुज है।

⇒ इसलिए AR ∥ BO, अर्थात MN ∥ PQ।

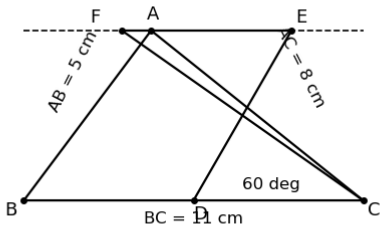
∴ बिंदु A से होकर PQ के समांतर रेखा तीनों तरीकों से खींची गई

> परीक्षा में तीनों में से कोई एक तरीका लिखना काफी है, पर तीनों तरीके जानने से कोई भी तरीका पूछे जाने पर उत्तर तैयार रहता है। पहली विधि सबसे छोटी और सबसे आसान है।

birlaeducation.org

प्रश्न 2 : त्रिभुज के बराबर समांतर चतुर्भुज, कोण 60°

प्रश्न : 5 सेमी, 8 सेमी और 11 सेमी भुजाओं वाला त्रिभुज बनाओ और उसके बराबर क्षेत्रफल वाला एक समांतर चतुर्भुज बनाओ, जिसका एक कोण 60° हो। रचना की विधि और उपपत्ति लिखो।



चित्र 2 : त्रिभुज ABC और उसके बराबर क्षेत्रफल वाला समांतर चतुर्भुज EDCF

दिया है : त्रिभुज की भुजाएँ 5 सेमी, 8 सेमी, 11 सेमी हैं और समांतर चतुर्भुज का एक कोण 60° है।

⇒ पहले AB = 5 सेमी, AC = 8 सेमी, BC = 11 सेमी वाला त्रिभुज ABC बनाओ।

⇒ फिर BC को परकार से समद्विभाजित करके मध्य बिंदु D लो, तो DC = BC/2।

⇒ इसके बाद A से होकर BC के समांतर रेखा PR खींचो।

⇒ फिर D पर ∠GDC = 60° बनाओ, जो रेखा PR को E पर काटे।

⇒ इसके बाद ER पर EF = DC काटो और C को F से जोड़ो।

⇒ चतुर्भुज EDCF ही अभीष्ट समांतर चतुर्भुज है।

उपपत्ति :

⇒ EF ∥ DC है और EF = DC है, इसलिए EDCF समांतर चतुर्भुज है।

⇒ समांतर चतुर्भुज EDCF का आधार DC = BC/2 है और ऊँचाई त्रिभुज ABC की ऊँचाई h के बराबर है, क्योंकि EDCF की ऊपर वाली भुजा A से होकर BC के समांतर खींची गई है।

⇒ समांतर चतुर्भुज EDCF का क्षेत्रफल = DC × h = (BC/2) × h = 1/2 × BC × h।

⇒ त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = 1/2 × BC × h।

⇒ इसलिए समांतर चतुर्भुज EDCF का क्षेत्रफल त्रिभुज ABC के क्षेत्रफल के बराबर है और इसका एक कोण 60° है।

∴ त्रिभुज ABC के बराबर क्षेत्रफल वाला समांतर चतुर्भुज EDCF बना, जिसका एक कोण 60° है

birlaeducation.org

प्रश्न 3 : त्रिभुज के बराबर समांतर चतुर्भुज, एक भुजा AC की आधी

प्रश्न : एक त्रिभुज बनाओ जिसमें AB = 6 सेमी, BC = 9 सेमी और ∠ABC = 55° है। उसके बराबर क्षेत्रफल वाला एक समांतर चतुर्भुज बनाओ, जिसका एक कोण 60° हो और एक भुजा AC की आधी हो।

दिया है : त्रिभुज में AB = 6 सेमी, BC = 9 सेमी, ∠ABC = 55° है। समांतर चतुर्भुज का एक कोण 60° और एक भुजा AC की आधी होनी चाहिए।

⇒ पहले AB = 6 सेमी खींचो, B पर 55° का कोण बनाओ और उस पर BC = 9 सेमी काटो, फिर A को C से जोड़कर त्रिभुज ABC बनाओ।

⇒ फिर AC को परकार से समद्विभाजित करके मध्य बिंदु D लो, तो DC = AC/2।

⇒ इसके बाद B से होकर AC के समांतर रेखा PR खींचो।

⇒ फिर D पर ∠GDC = 60° बनाओ, जो रेखा PR को E पर काटे।

⇒ इसके बाद ER पर EF = DC काटो और C को F से जोड़ो।

⇒ चतुर्भुज EDCF ही अभीष्ट समांतर चतुर्भुज है।

उपपत्ति :

⇒ EF ∥ DC है और EF = DC है, इसलिए EDCF समांतर चतुर्भुज है।

⇒ समांतर चतुर्भुज EDCF की एक भुजा DC = AC/2 है और इसका एक कोण 60° है।

⇒ समांतर चतुर्भुज EDCF का आधार DC = AC/2 है और ऊँचाई त्रिभुज ABC की ऊँचाई h के बराबर है, क्योंकि EDCF की ऊपर वाली भुजा B से होकर AC के समांतर खींची गई है।

⇒ समांतर चतुर्भुज EDCF का क्षेत्रफल = DC × h = (AC/2) × h = 1/2 × AC × h।

⇒ त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = 1/2 × AC × h।

⇒ इसलिए समांतर चतुर्भुज EDCF का क्षेत्रफल त्रिभुज ABC के क्षेत्रफल के बराबर है।

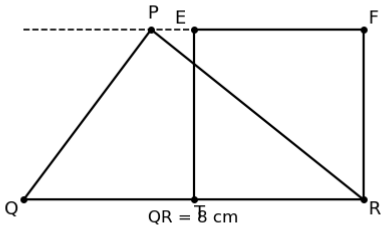
∴ त्रिभुज ABC के बराबर क्षेत्रफल वाला समांतर चतुर्भुज EDCF बना, जिसका एक कोण 60° है और एक भुजा AC की आधी है

इस प्रश्न में आधार AC है, इसलिए AC को आधा किया गया है। प्रश्न 2 में आधार BC था, इसलिए BC को आधा किया था। जिस भुजा को आधार मानो, उसी को आधा करो, यही पूरी तरकीब है।

biladeducation.org

प्रश्न 4 : त्रिभुज के बराबर आयत बनाओ

प्रश्न : त्रिभुज PQR में ∠PQR = 30°, ∠PRQ = 75° और QR = 8 सेमी है। इस त्रिभुज के बराबर क्षेत्रफल वाला एक आयत बनाओ।



चित्र 3 : त्रिभुज PQR और उसके बराबर क्षेत्रफल वाला आयत ETRF

दिया है : त्रिभुज PQR में ∠PQR = 30°, ∠PRQ = 75°, QR = 8 सेमी है।

⇒ पहले QR = 8 सेमी खींचो, Q पर 30° का कोण और R पर 75° का कोण बनाओ, दोनों भुजाएँ P पर मिलेंगी, त्रिभुज PQR बन जाएगा।

⇒ फिर QR का लंब समद्विभाजक खींचो, जो QR को मध्य बिंदु T पर काटे, तो TR = QR/2 = 4 सेमी।

⇒ इसके बाद P से होकर QR के समांतर रेखा CD खींचो, जो लंब समद्विभाजक को E पर काटे।

⇒ फिर ED पर EF = TR काटो और F को R से जोड़ो।

⇒ चतुर्भुज ETRF ही अभीष्ट आयत है।

उपपत्ति :

⇒ EF ∥ TR है और EF = TR है, इसलिए ETRF समांतर चतुर्भुज है।

⇒ ∠ETR = 90° है, क्योंकि ET, QR का लंब समद्विभाजक है, इसलिए ETRF आयत है।

⇒ आयत ETRF का क्षेत्रफल = TR × TE = (QR/2) × h, जहाँ h त्रिभुज PQR की ऊँचाई है, क्योंकि E, P से होकर QR के समांतर खींची गई रेखा पर है।

⇒ त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल = 1/2 × QR × h।

⇒ इसलिए आयत ETRF का क्षेत्रफल त्रिभुज PQR के क्षेत्रफल के बराबर है।

∴ त्रिभुज PQR के बराबर क्षेत्रफल वाला आयत ETRF बना

> आयत भी एक समांतर चतुर्भुज ही है, बस उसका एक कोण 90° होता है। इसीलिए लंब समद्विभाजक का इस्तेमाल किया गया है, ताकि कोण 90° बन जाए।

bindaeducation.org

प्रश्न 5 : समबाहु त्रिभुज के बराबर समांतर चतुर्भुज, कोण 45°

प्रश्न : 6.5 सेमी भुजा वाला एक समबाहु त्रिभुज बनाओ और उसके बराबर क्षेत्रफल वाला एक समांतर चतुर्भुज बनाओ, जिसका एक कोण 45° हो।

दिया है : समबाहु त्रिभुज की हर भुजा 6.5 सेमी है और समांतर चतुर्भुज का एक कोण 45° है।

⇒ पहले AB = BC = CA = 6.5 सेमी वाला समबाहु त्रिभुज ABC बनाओ।

⇒ फिर BC को परकार से समद्विभाजित करके मध्य बिंदु D लो, तो DC = BC/2।

⇒ इसके बाद A से होकर BC के समांतर रेखा PR खींचो।

⇒ फिर D पर ∠GDC = 45° बनाओ, जो रेखा PR को E पर काटे।

⇒ इसके बाद ER पर EF = DC काटो और C को F से जोड़ो।

⇒ चतुर्भुज EDCF ही अभीष्ट समांतर चतुर्भुज है।

उपपत्ति :

⇒ EF ∥ DC है और EF = DC है, इसलिए EDCF समांतर चतुर्भुज है।

⇒ समांतर चतुर्भुज EDCF का आधार DC = BC/2 है और ऊँचाई त्रिभुज ABC की ऊँचाई h के बराबर है, क्योंकि EDCF की ऊपर वाली भुजा A से होकर BC के समांतर खींची गई है।

⇒ समांतर चतुर्भुज EDCF का क्षेत्रफल = DC × h = (BC/2) × h = 1/2 × BC × h।

⇒ त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = 1/2 × BC × h।

⇒ इसलिए समांतर चतुर्भुज EDCF का क्षेत्रफल त्रिभुज ABC के क्षेत्रफल के बराबर है और इसका एक कोण 45° है।

birlaeducation.org

∴ समबाहु त्रिभुज ABC के बराबर क्षेत्रफल वाला समांतर चतुर्भुज EDCF बना, जिसका एक कोण 45° है

प्रश्न 6 : समद्विबाहु त्रिभुज के बराबर समांतर चतुर्भुज

प्रश्न : एक समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं में से हर एक की लंबाई 8 सेमी है और आधार की लंबाई 5 सेमी है। इस त्रिभुज के बराबर क्षेत्रफल वाला एक समांतर चतुर्भुज बनाओ, जिसका एक कोण त्रिभुज के बराबर कोणों में से एक के बराबर हो और एक भुजा बराबर भुजा की आधी हो।

दिया है : समद्विबाहु त्रिभुज में AB = AC = 8 सेमी, BC = 5 सेमी है। समांतर चतुर्भुज का एक कोण त्रिभुज के बराबर कोण के बराबर हो और एक भुजा 8/2 = 4 सेमी हो।

⇒ पहले BC = 5 सेमी खींचो और B तथा C को केंद्र मानकर 8 सेमी त्रिज्या से दो चाप काटो, जो A पर मिलें, त्रिभुज ABC बन जाएगा।

⇒ फिर एक नई रेखा पर बिंदु P लो और उस पर PQ = BC = 5 सेमी काटो।

⇒ इसके बाद P पर त्रिभुज के ∠ABC के बराबर कोण बनाओ, परकार से कोण की नकल करके।

⇒ फिर उस कोण की भुजा पर PR = 4 सेमी काटो, जो AB का आधा है।

⇒ इसके बाद R से PQ के समांतर रेखा और Q से PR के समांतर रेखा खींचो, वे S पर मिलें।

⇒ चतुर्भुज PQSR ही अभीष्ट समांतर चतुर्भुज है।

उपपत्ति :

⇒ PQ ∥ RS है और PR ∥ QS है, इसलिए PQSR समांतर चतुर्भुज है।

⇒ समांतर चतुर्भुज PQSR में PQ = 5 सेमी, PR = 4 सेमी और ∠QPR = ∠ABC है।

⇒ समांतर चतुर्भुज PQSR का क्षेत्रफल = PQ × PR × sin(∠QPR) = 5 × 4 × sin(∠ABC) = 20 sin(∠ABC)।

⇒ त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = 1/2 × BC × AB × sin(∠ABC) = 1/2 × 5 × 8 × sin(∠ABC) = 20 sin(∠ABC)।

⇒ इसलिए समांतर चतुर्भुज PQSR का क्षेत्रफल त्रिभुज ABC के क्षेत्रफल के बराबर है, इसका एक कोण त्रिभुज के बराबर कोण के बराबर है और एक भुजा बराबर भुजा की आधी है।

∴ समद्विबाहु त्रिभुज ABC के बराबर क्षेत्रफल वाला समांतर चतुर्भुज PQSR बना

> इस प्रश्न में समांतर चतुर्भुज की एक भुजा 4 सेमी, यानी बराबर भुजा की आधी, दी गई है। इसीलिए आधार को आधा करने वाला तरीका यहाँ सीधे नहीं लगता, भुजाओं और कोण से क्षेत्रफल मिलाया गया है।

परीक्षा में ध्यान देने वाली बातें

बच्चों की 4 आम ग़लतियाँ :

1. आधार को आधा करना भूल जाना : पूरा आधार लोगे तो समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल दोगुना हो जाएगा।

brlaeducation.org

2. समांतर रेखा न खींचना : शीर्ष से आधार के समांतर रेखा खींचे बिना ऊँचाई बदल जाती है और क्षेत्रफल गलत हो जाता है।

3. कोण गलत बिंदु पर बनाना : कोण हमेशा आधार के मध्य बिंदु पर बनाओ, वरना समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई त्रिभुज की ऊँचाई से अलग हो जाएगी।

4. उपपत्ति न लिखना : रचना के साथ उपपत्ति भी लिखो, क्योंकि उपपत्ति से ही पता चलता है कि क्षेत्रफल बराबर क्यों है।

आख़िरी जाँच की आदत : रचना पूरी होने पर हमेशा जाँचो कि समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = (आधा आधार) × ऊँचाई है या नहीं। अगर यह त्रिभुज के क्षेत्रफल के बराबर है, तो रचना सही है।

birlaeducation.org