कक्षा 8 गणित (WBBSE)

अध्याय 20 : ज्यामितीय प्रमाण

(Geometric Proofs)

स्वयं करो 20.1, 20.2, 20.3 और कषे देखी 20.1, 20.2, 20.3

पूरा हल, हिंदी में, चित्रों सहित

बिरला एजुकेशन

प्रश्न → चित्र → दिया है → हल → ∴ उत्तर

पहले ये बातें याद कर लें

इस अध्याय की असली बात : इस अध्याय में हम बिना मापे, सिर्फ तर्क से सिद्ध करते हैं कि कोई बात हमेशा सच होती है। इसके लिए तीन बातें बार बार काम आती हैं।

1. त्रिभुज असमिका : किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लंबाइयों का योग तीसरी भुजा की लंबाई से बड़ा होता है। और किन्हीं दो भुजाओं की लंबाइयों का अंतर तीसरी भुजा की लंबाई से छोटा होता है।

2. कोणों का योग : त्रिभुज के तीनों अंतःकोणों का योग 180° होता है। चतुर्भुज के चारों अंतःकोणों का योग 360° होता है।

3. बहुभुज के कोण : n भुजाओं वाले बहुभुज के सभी अंतःकोणों का योग (n − 2) × 180° होता है, यानी (2n − 4) समकोण। समबहुभुज का प्रत्येक अंतःकोण (2n − 4) × 90° / n होता है और प्रत्येक बहिष्कोण 360° / n होता है। किसी भी बहुभुज के सभी बहिष्कोणों का योग 360° होता है।

याद रखो : माध्यिका वह रेखाखंड है जो त्रिभुज के किसी शीर्ष को सामने वाली भुजा के मध्य बिंदु से जोड़ता है। विकर्ण वह रेखाखंड है जो बहुभुज के दो असन्निकट शीर्षों को जोड़ता है। उत्तल बहुभुज का हर अंतःकोण 180° से छोटा होता है।

birlaeducation.org

स्वयं करो 20.1

प्रश्न 1

प्रश्न : 4 सेमी और 6 सेमी लंबाई की दो छड़ियों से त्रिभुज जैसी आकृति बनाने के लिए तीसरी छड़ी की लंबाई किन दो संख्याओं के बीच होगी, देखो।

दिया है : दो छड़ियों की लंबाई 4 सेमी और 6 सेमी है।

माना : तीसरी छड़ी की लंबाई L सेमी है।

त्रिभुज असमिका से, किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है और किन्हीं दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा से छोटा होता है।

इसलिए $6 - 4 < L < 6 + 4$

$\Rightarrow 2 < L < 10$

यानी तीसरी छड़ी की लंबाई 2 सेमी से बड़ी और 10 सेमी से छोटी होनी चाहिए। जैसे 3 सेमी, 4 सेमी, 5 सेमी, 6 सेमी, 7 सेमी, 8 सेमी या 9 सेमी की छड़ी से त्रिभुज बनेगा।

∴ तीसरी छड़ी की लंबाई 2 सेमी और 10 सेमी के बीच होगी।

birlaeducation.org

प्रश्न 2

प्रश्न : किसी त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाई 3 सेमी और 6 सेमी है, तो तीसरी भुजा की लंबाई किन दो संख्याओं के बीच होगी, बताओ।

दिया है : त्रिभुज की दो भुजाएँ 3 सेमी और 6 सेमी हैं।

माना : तीसरी भुजा की लंबाई L सेमी है।

त्रिभुज असमिका से

$6 - 3 < L < 6 + 3$

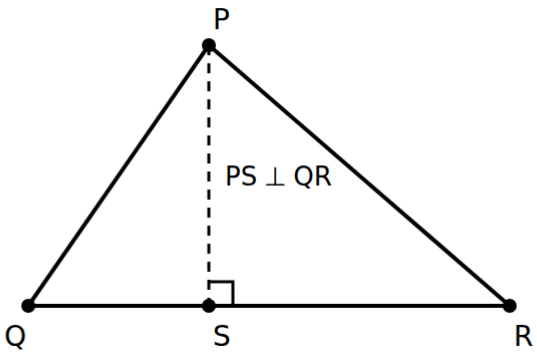
$\Rightarrow 3 < L < 9$

यानी तीसरी भुजा की लंबाई 3 सेमी से बड़ी और 9 सेमी से छोटी होनी चाहिए। जैसे 4 सेमी, 5 सेमी, 6 सेमी, 7 सेमी या 8 सेमी की भुजा से त्रिभुज बनेगा।

∴ तीसरी भुजा की लंबाई 3 सेमी और 9 सेमी के बीच होगी।

प्रश्न 3

प्रश्न : मेघा ने त्रिभुज PQR खींचा है। सिद्ध करो कि PQ + QR > PR, QR + RP > PQ और RP + PQ > QR।



चित्र 1 : P से QR पर लंब PS खींचा गया है

दिया है : ΔPQR एक त्रिभुज है।

सिद्ध करना है : PQ + QR > PR, QR + RP > PQ और RP + PQ > QR।

रचना : P से QR पर लंब PS खींचा, जो QR को S पर काटता है।

piriaeducation.org

ΔPSR में ∠PSR = 90° है, यानी यह समकोण है और त्रिभुज का सबसे बड़ा कोण है।

बड़े कोण के सामने वाली भुजा बड़ी होती है, इसलिए PR > SR ...(i)

ΔPSQ में ∠PSQ = 90° है, इसलिए PQ > QS ...(ii)

(i) और (ii) को जोड़ने पर

PQ + PR > QS + SR

पर QS + SR = QR है।

⇒ PQ + PR > QR

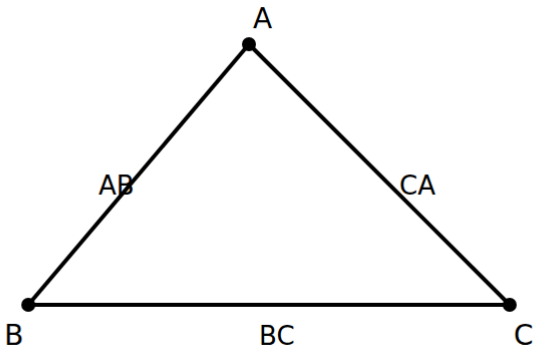
इसी तरह Q से PR पर और R से PQ पर लंब खींचकर बाकी दोनों असमिकाएँ भी मिलती हैं।

∴ RP + PQ > QR, और इसी तरह PQ + QR > PR और QR + RP > PQ।

स्वयं करो 20.2

प्रश्न 1

प्रश्न : तर्क से सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लंबाइयों का अंतर तीसरी भुजा की लंबाई से छोटा होता है।



चित्र 2 : त्रिभुज ABC की तीनों भुजाएँ AB, BC, CA

birlaeducation.org

दिया है : ΔABC एक त्रिभुज है, जिसकी भुजाएँ AB, BC और CA हैं।

सिद्ध करना है : किन्हीं दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा से छोटा होता है।

20.1 में हमने सिद्ध किया था कि किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

इसलिए AC + BC > AB है।

दोनों तरफ से AC घटाने पर

BC > AB − AC ...(i)

इसी तरह AB + BC > AC है।

दोनों तरफ से AB घटाने पर

BC > AC − AB ...(ii)

(i) और (ii) से साफ है कि AB और AC का अंतर, चाहे जो बड़ी हो, BC से छोटा है।

यानी AB − AC < BC और AC − AB < BC।

इसी तरह बाकी दोनों जोड़ी भुजाओं के लिए भी यही बात सच है।

∴ किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लंबाइयों का अंतर तीसरी भुजा की लंबाई से छोटा होता है।

प्रश्न 2

प्रश्न : नीचे दी गई भुजाओं की लंबाइयों से त्रिभुज बनाना संभव है या नहीं, बताओ : (1) 3 सेमी, 6 सेमी, 8 सेमी (2) 8 सेमी, 6 सेमी, 15 सेमी (3) 2.7 सेमी, 6.1 सेमी, 8.8 सेमी (4) 2.5 सेमी, 8 सेमी, 6 सेमी

याद रखो : त्रिभुज तभी बनेगा जब किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा हो। तीनों जोड़ी जाँचनी होती हैं।

(1) 3 सेमी, 6 सेमी, 8 सेमी

3 + 6 = 9 > 8, 3 + 8 = 11 > 6, 6 + 8 = 14 > 3

तीनों शर्तें पूरी होती हैं।

⇒ त्रिभुज बनाना संभव है।

(2) 8 सेमी, 6 सेमी, 15 सेमी

8 + 6 = 14, जो 15 से छोटा है।

8 + 6 < 15

⇒ त्रिभुज बनाना संभव नहीं है।

(3) 2.7 सेमी, 6.1 सेमी, 8.8 सेमी

2.7 + 6.1 = 8.8, जो 8.8 के बराबर है, बड़ा नहीं है।

2.7 + 6.1 = 8.8

बराबर होने पर तीनों बिंदु एक ही सीधी रेखा पर आ जाते हैं, त्रिभुज नहीं बनता।

birlaeducation.org

⇒ त्रिभुज बनाना संभव नहीं है।

(4) 2.5 सेमी, 8 सेमी, 6 सेमी

2.5 + 6 = 8.5 > 8, 2.5 + 8 = 10.5 > 6, 6 + 8 = 14 > 2.5

तीनों शर्तें पूरी होती हैं।

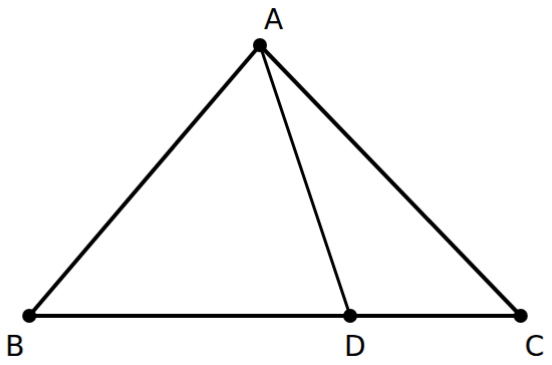
⇒ त्रिभुज बनाना संभव है।

∴ (1) संभव है, (2) संभव नहीं है, (3) संभव नहीं है, (4) संभव है।

कषे देखी 20.1

प्रश्न 1

प्रश्न : त्रिभुज ABC की भुजा BC पर D कोई बिंदु है। सिद्ध करो कि AB + BC + CA > 2AD।



चित्र 3 : BC पर बिंदु D, AD खींचा गया है

दिया है : ΔABC में D, BC पर कोई बिंदु है।

सिद्ध करना है : AB + BC + CA > 2AD।

रचना : AD रेखाखंड खींचा।

ΔABD में, किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

AB + BD > AD ...(i)

ΔADC में

AC + DC > AD ...(ii)

(i) और (ii) को जोड़ने पर

AB + BD + AC + DC > AD + AD

पर BD + DC = BC है।

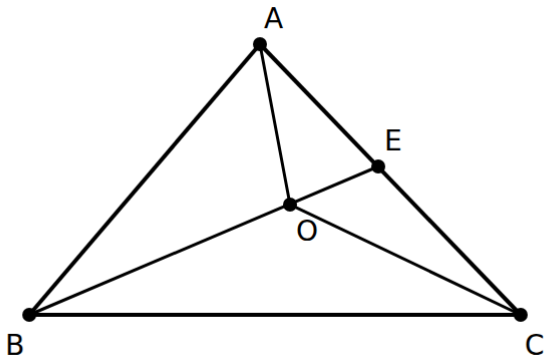
⇒ AB + BC + CA > 2AD

∴ AB + BC + CA > 2AD सिद्ध हुआ।

birlaeducation.org

प्रश्न 2

प्रश्न : O, त्रिभुज ABC के अंदर कोई बिंदु है। सिद्ध करो कि (1) AB + AC > OB + OC और (2) AB + BC + AC > OA + OB + OC।



चित्र 4 : BO को बढ़ाकर AC से E पर मिलाया गया है

दिया है : O, ΔABC के अंदर कोई बिंदु है।

रचना : BO को बढ़ाया, जो AC को E पर काटता है। AO और CO को भी जोड़ा।

(1) सिद्ध करना है : AB + AC > OB + OC

birlaeducation.org

ΔABE में

AB + AE > BE

BE = BO + OE है, इसलिए

AB + AE > BO + OE ...(i)

ΔOEC में

OE + EC > OC ...(ii)

(i) और (ii) को जोड़ने पर

AB + AE + OE + EC > BO + OE + OC

AE + EC = AC है, और OE दोनों तरफ से कट जाता है।

⇒ AB + AC > OB + OC

(2) सिद्ध करना है : AB + BC + AC > OA + OB + OC

ऊपर जैसी ही रचना से, CO को बढ़ाकर AB से और AO को बढ़ाकर BC से मिलाने पर

BC + BA > OC + OA ...(iii)

CA + CB > OA + OB ...(iv)

(1), (iii) और (iv) को जोड़ने पर

2(AB + BC + CA) > 2(OA + OB + OC)

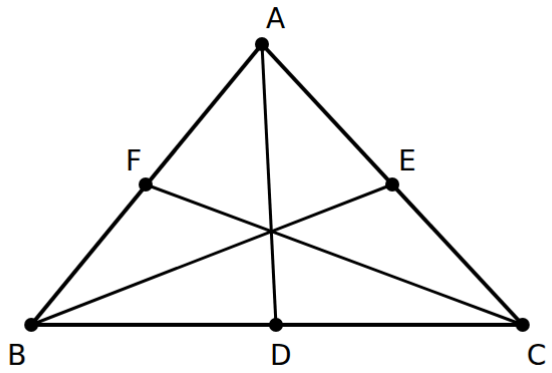
⇒ AB + BC + CA > OA + OB + OC

∴ (1) AB + AC > OB + OC और (2) AB + BC + AC > OA + OB + OC सिद्ध हुआ।

birlaeducation.org

प्रश्न 3

प्रश्न : सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज का परिमाप उसकी माध्यिकाओं की लंबाइयों के योग से बड़ा होता है।



चित्र 5 : AD, BE, CF तीनों माध्यिकाएँ हैं

दिया है : ΔABC में AD, BE, CF तीनों माध्यिकाएँ हैं। D, BC का मध्य बिंदु है, E, CA का मध्य बिंदु है, F, AB का मध्य बिंदु है।

सिद्ध करना है : AB + BC + CA > AD + BE + CF।

पहले यह सिद्ध करते हैं कि AB + AC > 2AD होता है।

AD को G तक बढ़ाया ताकि AD = DG हो, और CG को जोड़ा।

ΔABD और ΔGCD में

BD = DC (D मध्य बिंदु है), ∠ADB = ∠GDC (शीर्षाभिमुख कोण), AD = GD (रचना से)

इसलिए ΔABD ≅ ΔGCD (भुजा कोण भुजा सर्वांगसमता से)

⇒ AB = GC

ΔACG में

AC + CG > AG

AG = 2AD है और CG = AB है, इसलिए

AC + AB > 2AD ...(i)

इसी तरह

AB + BC > 2BE ...(ii)

BC + CA > 2CF ...(iii)

(i), (ii) और (iii) को जोड़ने पर

2(AB + BC + CA) > 2(AD + BE + CF)

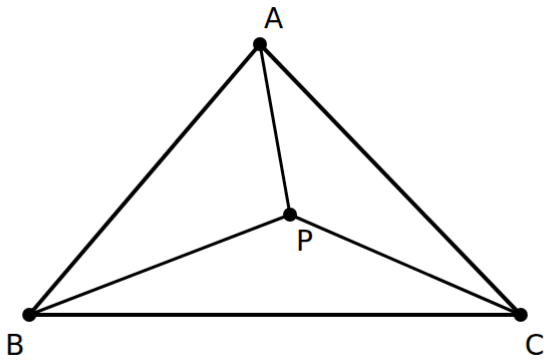
⇒ AB + BC + CA > AD + BE + CF

∴ त्रिभुज का परिमाप माध्यिकाओं के योग से बड़ा होता है।

bridgeducation.org

प्रश्न 4

प्रश्न : P, त्रिभुज ABC के अंदर कोई बिंदु है। सिद्ध करो कि (1) AP + BP > AB और (2) AB + BC + AC < 2(AP + BP + CP)।



चित्र 6 : P अंदर का बिंदु है, AP, BP, CP जोड़े गए हैं

दिया है : P, ΔABC के अंदर कोई बिंदु है।

रचना : AP, BP और CP को जोड़ा।

(1) ΔAPB में, किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

⇒ AP + BP > AB

(2) ΔAPB में AP + BP > AB ...(i)

ΔBPC में BP + CP > BC ...(ii)

ΔCPA में CP + AP > CA ...(iii)

(i), (ii) और (iii) को जोड़ने पर

2AP + 2BP + 2CP > AB + BC + CA

⇒ 2(AP + BP + CP) > AB + BC + CA

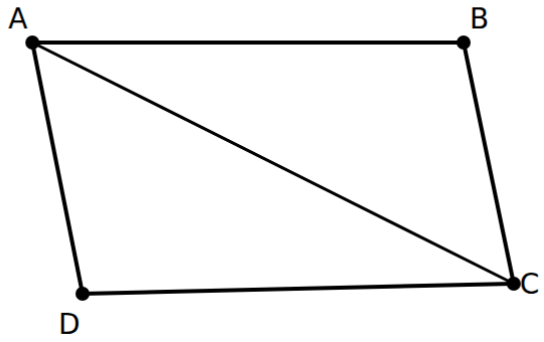
यानी AB + BC + CA < 2(AP + BP + CP)

∴ (1) AP + BP > AB और (2) AB + BC + AC < 2(AP + BP + CP) सिद्ध हुआ।

pariaeducation.org

प्रश्न 5

प्रश्न : सिद्ध करो कि किसी चतुर्भुज का परिमाप उसके किसी भी विकर्ण की लंबाई के दोगुने से बड़ा होता है।



चित्र 7 : चतुर्भुज ABCD और विकर्ण AC

दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है, AC उसका एक विकर्ण है।

सिद्ध करना है : AB + BC + CD + DA > 2AC।

विकर्ण AC चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में बाँटता है।

birlaeducation.org

ΔABC में

AB + BC > AC ...(i)

ΔADC में

AD + DC > AC ...(ii)

(i) और (ii) को जोड़ने पर

AB + BC + AD + DC > AC + AC

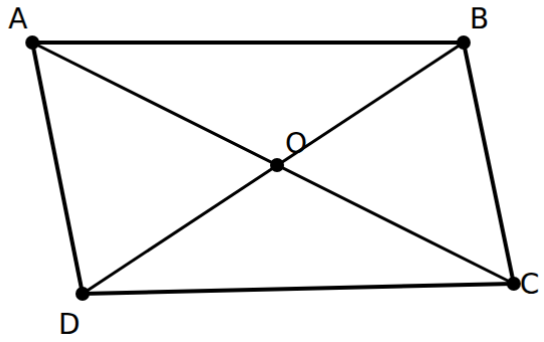
⇒ AB + BC + CD + DA > 2AC

इसी तरह दूसरे विकर्ण BD के लिए भी परिमाप > 2BD मिलता है।

∴ चतुर्भुज का परिमाप किसी भी विकर्ण के दोगुने से बड़ा होता है।

प्रश्न 6

प्रश्न : सिद्ध करो कि किसी चतुर्भुज के दोनों विकर्णों की लंबाइयों का योग उसकी किन्हीं दो सम्मुख भुजाओं की लंबाइयों के योग से बड़ा होता है।



चित्र 8 : विकर्ण AC और BD, O पर काटते हैं

दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है, AC और BD उसके विकर्ण हैं, जो O पर काटते हैं।

सिद्ध करना है : AC + BD > AD + BC और AC + BD > AB + CD।

ΔAOD में

AO + OD > AD ...(i)

ΔBOC में

BO + OC > BC ...(ii)

(i) और (ii) को जोड़ने पर

AO + OD + BO + OC > AD + BC

AO + OC = AC है और BO + OD = BD है।

⇒ AC + BD > AD + BC

इसी तरह ΔAOB और ΔCOD से

AC + BD > AB + CD भी मिलता है।

∴ दोनों विकर्णों का योग किन्हीं दो सम्मुख भुजाओं के योग से बड़ा होता है।

birlaeducation.org

प्रश्न 7

प्रश्न : सिद्ध करो कि किसी चतुर्भुज के दोनों विकर्णों की लंबाइयों का योग उसके अर्ध परिमाप से बड़ा होता है।

दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है, AC और BD उसके विकर्ण हैं, जो O पर काटते हैं। (चित्र 8 देखो)

सिद्ध करना है : AC + BD > (AB + BC + CD + DA) / 2।

ΔAOB में AO + OB > AB ...(i)

ΔBOC में BO + OC > BC ...(ii)

ΔCOD में CO + OD > CD ...(iii)

ΔDOA में DO + OA > DA ...(iv)

(i), (ii), (iii) और (iv) को जोड़ने पर

2AO + 2BO + 2CO + 2DO > AB + BC + CD + DA

2(AO + OC) + 2(BO + OD) > AB + BC + CD + DA

2AC + 2BD > AB + BC + CD + DA

⇒ AC + BD > (AB + BC + CD + DA) / 2

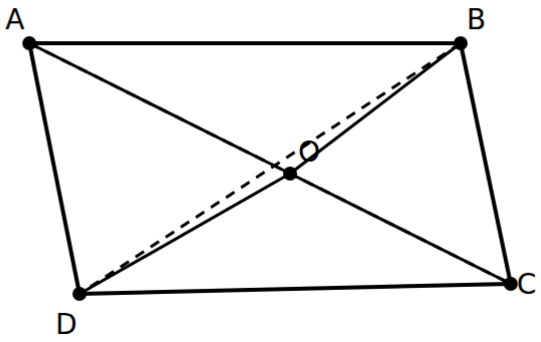
चतुर्भुज का अर्ध परिमाप (AB + BC + CD + DA) / 2 ही होता है।

birlaeducation.org

∴ दोनों विकर्णों का योग चतुर्भुज के अर्ध परिमाप से बड़ा होता है।

प्रश्न 8

प्रश्न : चतुर्भुज के अंदर (किसी विकर्ण पर नहीं) एक बिंदु से उसके शीर्षों को जोड़ने पर बने रेखाखंडों की लंबाइयों का योग विकर्णों की लंबाइयों के योग से बड़ा होता है, सिद्ध करो। यह भी बताओ कि अंदर का बिंदु किस जगह हो तो यह योग सबसे छोटा होगा।



चित्र 9 : अंदर का बिंदु O, विकर्ण बिंदीदार रेखा से दिखाए गए हैं

दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है, O उसके अंदर कोई बिंदु है जो किसी विकर्ण पर नहीं है। AC और BD विकर्ण हैं।

सिद्ध करना है : OA + OB + OC + OD > AC + BD।

birlaeducation.org

ΔAOC में

OA + OC > AC ...(i)

ΔBOD में

OB + OD > BD ...(ii)

(i) और (ii) को जोड़ने पर

OA + OB + OC + OD > AC + BD

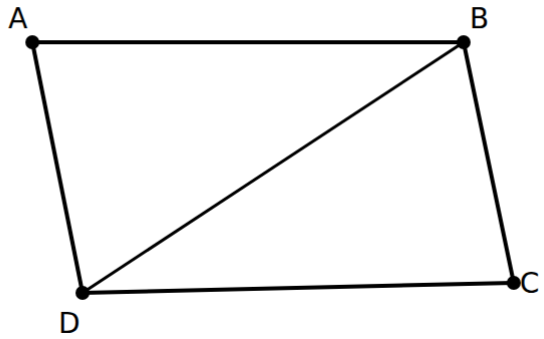
योग सबसे छोटा कब होगा : दो बिंदुओं के बीच सीधी रेखा ही सबसे छोटी दूरी होती है। OA + OC तभी सबसे छोटा होगा जब O, AC पर हो, तब OA + OC = AC। इसी तरह OB + OD तभी सबसे छोटा होगा जब O, BD पर हो, तब OB + OD = BD। दोनों बातें एक साथ तभी होती हैं जब O दोनों विकर्णों के कटान बिंदु पर हो। तब योग = AC + BD होता है, जो सबसे छोटा संभव योग है।

∴ OA + OB + OC + OD > AC + BD, और यह योग सबसे छोटा तब होता है जब बिंदु दोनों विकर्णों के कटान बिंदु पर हो।

स्वयं करो 20.3

प्रश्न 1

प्रश्न : तर्क से सिद्ध करो कि चतुर्भुज के चारों अंतःकोणों का योग 360° होता है।



चित्र 10 : चतुर्भुज ABCD और विकर्ण BD

दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है : ∠A + ∠B + ∠C + ∠D = 360°।

रचना : विकर्ण BD खींचा।

ΔABD में, त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।

∠A + ∠ABD + ∠ADB = 180° ...(i)

ΔBCD में

∠C + ∠CBD + ∠CDB = 180° ...(ii)

(i) और (ii) को जोड़ने पर

∠A + ∠ABD + ∠ADB + ∠C + ∠CBD + ∠CDB = 360°

∠ABD + ∠CBD = ∠B है और ∠ADB + ∠CDB = ∠D है।

⇒ ∠A + ∠B + ∠C + ∠D = 360°

∴ चतुर्भुज के चारों अंतःकोणों का योग 360° होता है।

birlaeducation.org

प्रश्न 2

प्रश्न : अष्टभुज के आठों अंत:कोणों का योग हिसाब करके बताओ।

दिया है : अष्टभुज में भुजाओं की संख्या n = 8 है।

n भुजाओं वाले बहुभुज के अंत:कोणों का योग (n − 2) × 180° होता है।

योग = (8 − 2) × 180°

= 6 × 180°

= 1080°

∴ अष्टभुज के आठों अंत:कोणों का योग 1080° होता है।

प्रश्न 3

प्रश्न : 10 भुजाओं वाले समबहुभुज का प्रत्येक अंत:कोण और प्रत्येक बहिष्कोण बताओ।

दिया है : समबहुभुज में भुजाओं की संख्या n = 10 है।

brlaeducation.org

सभी अंत:कोणों का योग = (n − 2) × 180°

= (10 − 2) × 180°

= 8 × 180° = 1440°

समबहुभुज के सभी अंत:कोण बराबर होते हैं।

प्रत्येक अंत:कोण = 1440° / 10 = 144°

सभी बहिष्कोणों का योग 360° होता है।

प्रत्येक बहिष्कोण = 360° / 10 = 36°

∴ प्रत्येक अंत:कोण 144° और प्रत्येक बहिष्कोण 36° होता है।

प्रश्न 4

प्रश्न : किसी समबहुभुज का प्रत्येक कोण 120° है, तो उसकी भुजाओं की संख्या हिसाब करके बताओ।

दिया है : समबहुभुज का प्रत्येक अंतःकोण 120° है।

अंतःकोण + बहिष्कोण = 180° होता है।

प्रत्येक बहिष्कोण = 180° − 120° = 60°

भुजाओं की संख्या = 360° / प्रत्येक बहिष्कोण

= 360° / 60° = 6

∴ भुजाओं की संख्या 6 है, यानी यह समषट्भुज है।

प्रश्न 5

प्रश्न : 18 भुजाओं वाले समबहुभुज का प्रत्येक अंतःकोण और प्रत्येक बहिष्कोण बताओ।

brlaeducation.org

दिया है : समबहुभुज में भुजाओं की संख्या n = 18 है।

सभी अंतःकोणों का योग = (n − 2) × 180°

= (18 − 2) × 180°

= 16 × 180° = 2880°

प्रत्येक अंतःकोण = 2880° / 18 = 160°

प्रत्येक बहिष्कोण = 360° / 18 = 20°

∴ प्रत्येक अंतःकोण 160° और प्रत्येक बहिष्कोण 20° होता है।

प्रश्न 6

प्रश्न : किसी समबहुभुज का प्रत्येक अंतःकोण 144° है, तो उसकी भुजाओं की संख्या बताओ।

दिया है : समबहुभुज का प्रत्येक अंतःकोण 144° है।

अंतःकोण + बहिष्कोण = 180° होता है।

प्रत्येक बहिष्कोण = 180° − 144° = 36°

भुजाओं की संख्या = 360° / प्रत्येक बहिष्कोण

= 360° / 36° = 10

∴ भुजाओं की संख्या 10 है, यानी यह समदशभुज है।

birlaeducation.org

कषे देखी 20.2

प्रश्न 1

प्रश्न : नीचे दिए गए बहुभुजों के अंत:कोणों का योग बताओ : पंचभुज, षट्भुज, सप्तभुज, अष्टभुज, दशभुज और 12 भुजाओं वाला बहुभुज।

याद रखो : n भुजाओं वाले बहुभुज के अंत:कोणों का योग (n − 2) × 180° होता है।

बहुभुज	भुजाएँ (n)	हिसाब	योग
पंचभुज	5	(5 − 2) × 180°	**540°**
षट्भुज	6	(6 − 2) × 180°	**720°**
सप्तभुज	7	(7 − 2) × 180°	**900°**
अष्टभुज	8	(8 − 2) × 180°	**1080°**
दशभुज	10	(10 − 2) × 180°	**1440°**
12 भुजाओं वाला	12	(12 − 2) × 180°	**1800°**

birlaeducation.org

∴ पंचभुज 540°, षट्भुज 720°, सप्तभुज 900°, अष्टभुज 1080°, दशभुज 1440°, 12 भुजाओं वाला 1800°।

प्रश्न 2

प्रश्न : किसी चतुर्भुज के तीन कोण 104.5°, 65° और 72.5° हैं। चौथे कोण की माप बताओ।

दिया है : चतुर्भुज के तीन कोण 104.5°, 65° और 72.5° हैं।

माना : चौथा कोण x है।

चतुर्भुज के चारों अंत:कोणों का योग 360° होता है।

104.5° + 65° + 72.5° + x = 360°

242° + x = 360°

x = 360° − 242°

x = 118°

∴ चौथे कोण की माप 118° है।

प्रश्न 3

प्रश्न : किसी पंचभुज के चार कोण 65°, 89°, 132° और 116° हैं। पाँचवें कोण की माप बताओ।

birlaeducation.org

दिया है : पंचभुज के चार कोण 65°, 89°, 132° और 116° हैं।

माना : पाँचवाँ कोण x है।

पंचभुज के सभी अंत:कोणों का योग = (5 − 2) × 180° = 540° होता है।

65° + 89° + 132° + 116° + x = 540°

402° + x = 540°

x = 540° − 402°

x = 138°

∴ पाँचवें कोण की माप 138° है।

प्रश्न 4

प्रश्न : क्या किसी उत्तल चतुर्भुज के तीन कोण 68°, 70° और 75° हो सकते हैं? बताओ।

दिया है : उत्तल चतुर्भुज के तीन कोण 68°, 70° और 75° हैं।

तीनों कोणों का योग = 68° + 70° + 75° = 213°

चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है।

चौथा कोण = 360° − 213° = 147°

147° < 180° है। उत्तल बहुभुज का हर अंतःकोण 180° से छोटा होता है, इसलिए ऐसा चतुर्भुज बन सकता है।

∴ हाँ, संभव है। चौथा कोण 147° होगा।

प्रश्न 5

प्रश्न : क्या किसी उत्तल षट्भुज के पाँच कोण 120°, 70°, 95°, 78° और 160° हो सकते हैं? बताओ।

birlaeducation.org

दिया है : उत्तल षट्भुज के पाँच कोण 120°, 70°, 95°, 78° और 160° हैं।

पाँचों कोणों का योग = 120° + 70° + 95° + 78° + 160° = 523°

षट्भुज के सभी अंतःकोणों का योग = (6 − 2) × 180° = 720° होता है।

छठा कोण = 720° − 523° = 197°

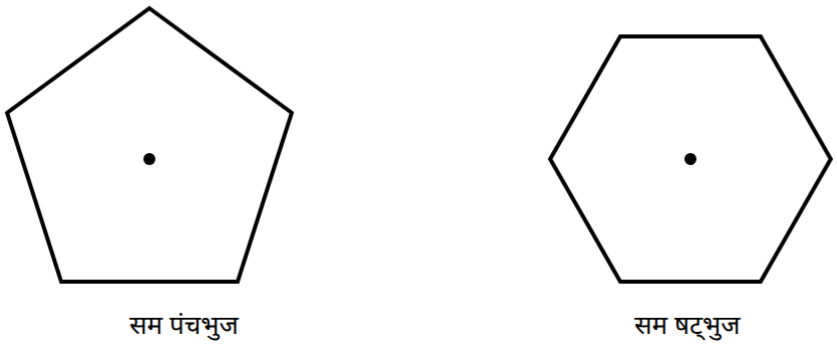
197° > 180° है। उत्तल बहुभुज का कोई भी अंतःकोण 180° से बड़ा नहीं हो सकता।

इसलिए ऐसे कोणों वाला उत्तल षट्भुज नहीं बन सकता।

∴ नहीं, संभव नहीं है। छठा कोण 197° हो जाएगा, जो 180° से बड़ा है।

प्रश्न 6

प्रश्न : नीचे दिए गए समबहुभुजों का प्रत्येक अंतःकोण और प्रत्येक बहिष्कोण बताओ : पंचभुज, षट्भुज, अष्टभुज, 9 भुजाओं वाला बहुभुज, दशभुज और 18 भुजाओं वाला बहुभुज।



चित्र 11 : सम पंचभुज और सम षट्भुज

याद रखो : समबहुभुज का प्रत्येक अंतःकोण = सभी अंतःकोणों का योग / n, और प्रत्येक बहिष्कोण = 360° / n।

समबहुभुज	अंतःकोणों का योग	प्रत्येक अंतःकोण	प्रत्येक बहिष्कोण
पंचभुज	540°	540° / 5 = **108°**	360° / 5 = **72°**
षट्भुज	720°	720° / 6 = **120°**	360° / 6 = **60°**
अष्टभुज	1080°	1080° / 8 = **135°**	360° / 8 = **45°**
9 भुजाओं वाला	1260°	1260° / 9 = **140°**	360° / 9 = **40°**
दशभुज	1440°	1440° / 10 = **144°**	360° / 10 = **36°**
18 भुजाओं वाला	2880°	2880° / 18 = **160°**	360° / 18 = **20°**

birlaeducation.org

∴ पंचभुज 108°/72°, षट्भुज 120°/60°, अष्टभुज 135°/45°, 9 भुजाओं वाला 140°/40°, दशभुज 144°/36°, 18 भुजाओं वाला 160°/20°।

प्रश्न 7

प्रश्न : नीचे दी गई मापें किसी समबहुभुज के बहिष्कोण की हो सकती हैं या नहीं, बताओ : 6°, 10°, 13°, 18°, 35°।

याद रखो : समबहुभुज के प्रत्येक बहिष्कोण की माप ऐसी होनी चाहिए कि 360° को उससे भाग देने पर पूरी संख्या मिले, क्योंकि भुजाओं की संख्या पूरी संख्या ही होती है।

बहिष्कोण	360° / बहिष्कोण	संभव?
6°	360 / 6 = 60	**हाँ**
10°	360 / 10 = 36	**हाँ**
13°	360 / 13 = 27.69	**नहीं**
18°	360 / 18 = 20	**हाँ**
35°	360 / 35 = 10.28	**नहीं**

birlaeducation.org

∴ 6° हाँ, 10° हाँ, 13° नहीं, 18° हाँ, 35° नहीं।

प्रश्न 8

प्रश्न : नीचे दी गई मापें किसी समबहुभुज के अंत:कोण की हो सकती हैं या नहीं, बताओ : 80°, 100°, 120°, 144°, 155°, 160°।

याद रखो : अंत:कोण + बहिष्कोण = 180° होता है। बहिष्कोण = 180° − अंत:कोण। फिर भुजाओं की संख्या = 360° / बहिष्कोण पूरी संख्या होनी चाहिए।

अंत:कोण	बहिष्कोण	360° / बहिष्कोण	संभव?
80°	100°	3.6	**नहीं**
100°	80°	4.5	**नहीं**
120°	60°	6	**हाँ (षट्भुज)**
144°	36°	10	**हाँ (दशभुज)**
155°	25°	14.4	**नहीं**
160°	20°	18	**हाँ (18 भुजाओं वाला)**

birlaeducation.org

∴ 80° नहीं, 100° नहीं, 120° हाँ, 144° हाँ, 155° नहीं, 160° हाँ।

प्रश्न 9

प्रश्न : किसी समबहुभुज का प्रत्येक बहिष्कोण 60° है। उसकी भुजाओं की संख्या बताओ।

दिया है : समबहुभुज का प्रत्येक बहिष्कोण 60° है।

सभी बहिष्कोणों का योग 360° होता है।

भुजाओं की संख्या = 360° / प्रत्येक बहिष्कोण

= 360° / 60°

= 6

∴ भुजाओं की संख्या 6 है, यानी यह समषट्भुज है।

प्रश्न 10

प्रश्न : किसी समबहुभुज का प्रत्येक अंतःकोण 135° है। उसकी भुजाओं की संख्या बताओ।

दिया है : समबहुभुज का प्रत्येक अंतःकोण 135° है।

अंतःकोण + बहिष्कोण = 180° होता है।

प्रत्येक बहिष्कोण = 180° − 135° = 45°

भुजाओं की संख्या = 360° / प्रत्येक बहिष्कोण

= 360° / 45°

= 8

∴ भुजाओं की संख्या 8 है, यानी यह समअष्टभुज है।

प्रश्न 11

प्रश्न : किसी समबहुभुज के एक अंतःकोण और एक बहिष्कोण की मापों का अनुपात 3 : 2 है। उसकी भुजाओं की संख्या बताओ।

birlaeducation.org

दिया है : अंतःकोण : बहिष्कोण = 3 : 2।

अंतःकोण + बहिष्कोण = 180° होता है।

अनुपात का योग = 3 + 2 = 5

प्रत्येक बहिष्कोण = (2 / 5) × 180° = 72°

भुजाओं की संख्या = 360° / प्रत्येक बहिष्कोण

= 360° / 72°

= 5

∴ भुजाओं की संख्या 5 है, यानी यह समपंचभुज है।

प्रश्न 12

प्रश्न : किसी बहुभुज के सभी अंत:कोणों का योग 1800° है। उसकी भुजाओं की संख्या बताओ।

दिया है : सभी अंत:कोणों का योग 1800° है।

माना : भुजाओं की संख्या n है।

n भुजाओं वाले बहुभुज के अंत:कोणों का योग (n − 2) × 180° होता है।

(n − 2) × 180° = 1800°

n − 2 = 1800° / 180°

n − 2 = 10

n = 12

∴ भुजाओं की संख्या 12 है।

प्रश्न 13

प्रश्न : किसी बहुभुज के 5 अंत:कोणों में से प्रत्येक की माप 172° है और बाकी प्रत्येक अंत:कोण की माप 160° है। बहुभुज की भुजाओं की संख्या बताओ।

birlaeducation.org

दिया है : 5 अंत:कोण, प्रत्येक 172° के हैं। बाकी प्रत्येक अंत:कोण 160° का है।

माना : भुजाओं की संख्या n है।

सभी अंत:कोणों का योग = 5 × 172° + (n − 5) × 160°

= 860° + 160°(n − 5)

सूत्र से सभी अंत:कोणों का योग = (n − 2) × 180° भी होता है।

इसलिए 860° + 160°(n − 5) = (n − 2) × 180°

860 + 160n − 800 = 180n − 360

160n + 60 = 180n − 360

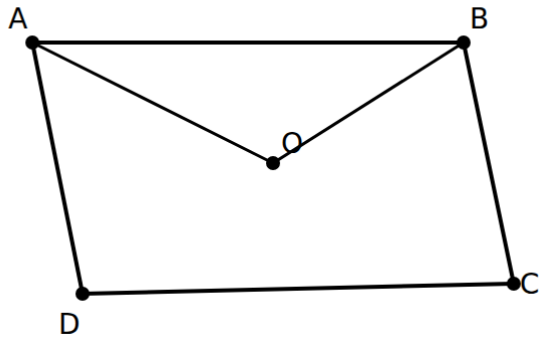
420 = 20n

n = 21

∴ भुजाओं की संख्या 21 है।

प्रश्न 14

प्रश्न : सिद्ध करो कि चतुर्भुज के दो सन्निकट कोणों के समद्विभाजकों से बना कोण बाकी दो कोणों के योग का आधा होता है।



चित्र 12 : OA, ∠A का समद्विभाजक है और OB, ∠B का समद्विभाजक है

दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है। OA, ∠DAB का समद्विभाजक है और OB, ∠ABC का समद्विभाजक है। दोनों O पर मिलते हैं।

सिद्ध करना है : ∠AOB = (∠BCD + ∠CDA) / 2।

OA समद्विभाजक है, इसलिए ∠OAB = ∠BAD / 2 ...(i)

OB समद्विभाजक है, इसलिए ∠OBA = ∠ABC / 2 ...(ii)

ΔAOB में, तीनों कोणों का योग 180° होता है।

∠OAB + ∠OBA + ∠AOB = 180°

(i) और (ii) से

∠BAD / 2 + ∠ABC / 2 + ∠AOB = 180° ...(iii)

चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है।

∠BAD + ∠ABC + ∠BCD + ∠CDA = 360°

दोनों तरफ 2 से भाग देने पर

∠BAD / 2 + ∠ABC / 2 = 180° − (∠BCD + ∠CDA) / 2 ...(iv)

(iv) को (iii) में रखने पर

180° − (∠BCD + ∠CDA) / 2 + ∠AOB = 180°

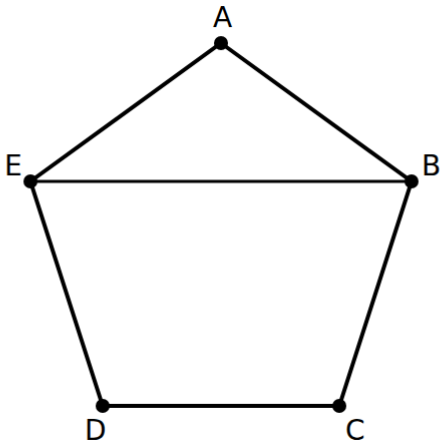
⇒ ∠AOB = (∠BCD + ∠CDA) / 2

∴ ∠AOB = (∠BCD + ∠CDA) / 2 सिद्ध हुआ।

birlaeducation.org

प्रश्न 15

प्रश्न : ABCDE एक सम पंचभुज है। सिद्ध करो कि (1) त्रिभुज ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है और (2) BE और CD समांतर रेखाखंड हैं।



चित्र 13 : सम पंचभुज ABCDE और विकर्ण BE

दिया है : ABCDE एक सम पंचभुज है, इसलिए उसकी सभी भुजाएँ बराबर हैं और सभी अंत:कोण बराबर हैं। सम पंचभुज का प्रत्येक अंत:कोण 108° होता है।

birlaeducation.org

(1) सिद्ध करना है : ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है

AB = BC है, क्योंकि दोनों सम पंचभुज की भुजाएँ हैं।

ΔABC की दो भुजाएँ बराबर हैं, इसलिए यह समद्विबाहु त्रिभुज है।

(2) सिद्ध करना है : BE || CD

ΔABE में AB = AE है, इसलिए ∠ABE = ∠AEB है (बराबर भुजाओं के सामने वाले कोण बराबर होते हैं)।

∠ABC = ∠AED है, क्योंकि सम पंचभुज के सभी अंत:कोण बराबर होते हैं।

∠ABC = ∠ABE + ∠EBC है और ∠AED = ∠AEB + ∠BED है।

इसलिए ∠EBC = ∠BED ...(i)

चतुर्भुज BCDE में

∠EBC + ∠BCD + ∠CDE + ∠BED = 360°

∠BCD = ∠CDE = 108° है।

(i) से ∠EBC = ∠BED है, इसलिए

2 × ∠BED + 108° + 108° = 360°

2 × ∠BED = 144°

∠BED = 72°

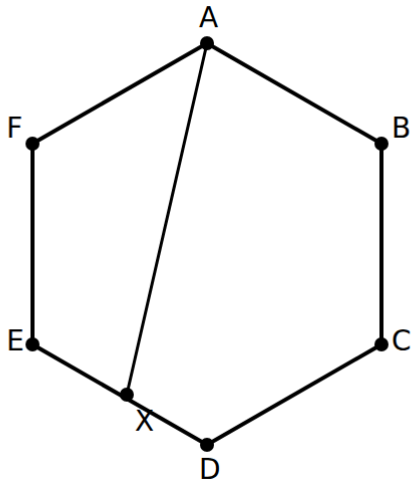
अब ∠BED + ∠CDE = 72° + 108° = 180°

ED तिर्यक रेखा पर बने एक ही तरफ के अंत:कोणों का योग 180° है, इसलिए BE || CD।

∴ (1) ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है और (2) BE || CD सिद्ध हुआ।

प्रश्न 16

प्रश्न : ABCDEF एक सम षट्भुज है। ∠BAF का समद्विभाजक DE को X पर काटता है। ∠AXD की माप बताओ।



चित्र 14 : सम षट्भुज ABCDEF और समद्विभाजक AX

birlaeducation.org

दिया है : ABCDEF एक सम षट्भुज है। AX, ∠BAF का समद्विभाजक है और DE को X पर काटता है।

सम षट्भुज का प्रत्येक अंतःकोण = (6 − 2) × 180° / 6 = 120° होता है।

AX समद्विभाजक है, इसलिए

∠XAF = ∠BAF / 2 = 120° / 2 = 60°

अब चतुर्भुज AFEX में

∠XAF + ∠AFE + ∠FEX + ∠EXA = 360°

∠AFE = 120° और ∠FEX = 120° है, क्योंकि ये सम षट्भुज के अंतःकोण हैं।

60° + 120° + 120° + ∠EXA = 360°

300° + ∠EXA = 360°

∠EXA = 60°

∠AXD और ∠EXA एक सरल रेखा DE पर बने आसन्न कोण हैं।

∠AXD + ∠EXA = 180°

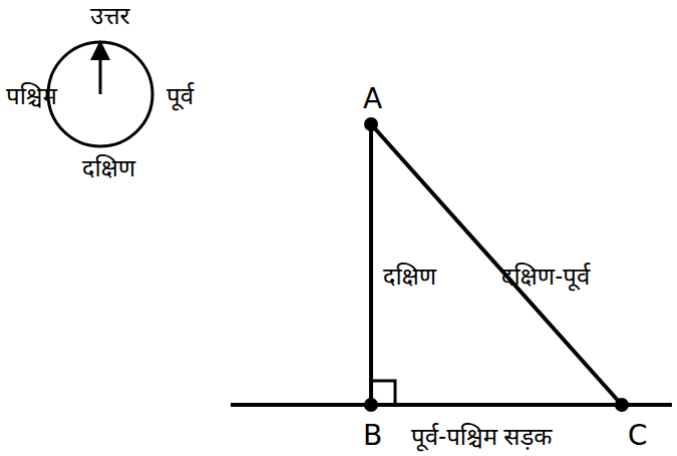
∠AXD = 180° − 60° = 120°

∴ ∠AXD = 120°।

कषे देखी 20.3

प्रश्न 1

प्रश्न : दो व्यक्ति एक ही जगह से चलकर पूर्व-पश्चिम सड़क तक पहुँचना चाहते हैं। एक व्यक्ति दक्षिण दिशा में चलता है और दूसरा व्यक्ति दक्षिण-पूर्व दिशा में चलता है। हिसाब करके बताओ कि सड़क तक पहले कौन पहुँचेगा।



चित्र 15 : A से दक्षिण दिशा में AB और दक्षिण-पूर्व दिशा में AC

दिया है : दोनों व्यक्ति एक ही जगह A से चलते हैं। BC पूर्व-पश्चिम सड़क है। पहला व्यक्ति दक्षिण दिशा में AB रास्ते से और दूसरा व्यक्ति दक्षिण-पूर्व दिशा में AC रास्ते से सड़क तक जाता है।

उत्तर-दक्षिण रेखा पूर्व-पश्चिम रेखा पर लंब होती है, इसलिए $AB \perp BC$ है।

ΔABC में $\angle B = 90°$ है।

समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे बड़ी भुजा होती है।

AC, $\angle B$ के सामने वाली भुजा है, यानी AC कर्ण है।

इसलिए $AC > AB$ है।

पहले व्यक्ति को AB दूरी चलनी है और दूसरे व्यक्ति को AC दूरी चलनी है।

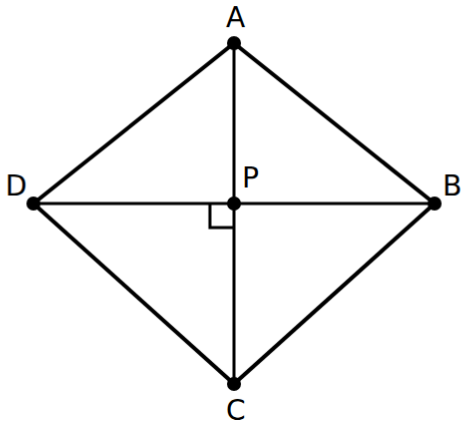
$AB < AC$ है, इसलिए पहला व्यक्ति कम दूरी चलेगा।

∴ दक्षिण दिशा में चलने वाला पहला व्यक्ति सड़क तक पहले पहुँचेगा।

birlaeducation.org

प्रश्न 2

प्रश्न : चतुर्भुज ABCD में AB = AD और BC = DC है। D से AC पर खींची गई सबसे छोटी दूरी DP है। सिद्ध करो कि B, P और D एक ही रेखा पर हैं।



चित्र 16 : AB = AD और BC = DC वाला चतुर्भुज, DP ⊥ AC

दिया है : चतुर्भुज ABCD में AB = AD और BC = DC है। DP, D से AC पर खींची गई सबसे छोटी दूरी है।

सिद्ध करना है : B, P और D एक ही रेखा पर हैं।

DP, D से AC की सबसे छोटी दूरी है, इसलिए DP ⊥ AC है।

AB = AD है, यानी बिंदु A, B और D से बराबर दूरी पर है। इसलिए A, BD के लंब समद्विभाजक पर है।

BC = DC है, यानी बिंदु C भी B और D से बराबर दूरी पर है। इसलिए C भी BD के लंब समद्विभाजक पर है।

इसलिए AC ही BD का लंब समद्विभाजक है।

माना BD का मध्य बिंदु M है। AC, M से होकर जाती है और AC ⊥ BD है।

D से AC पर लंब डालने पर उसका पाद M ही होगा, क्योंकि DM, AC पर लंब है।

इसलिए P, M ही है और P, BD पर है।

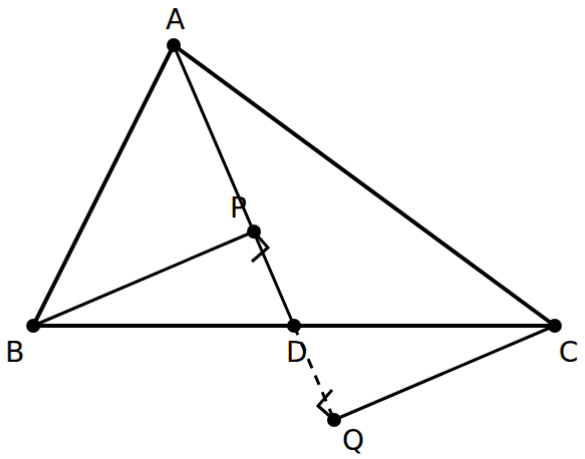
⇒ B, P और D एक ही रेखा पर हैं।

∴ B, P और D संरेख बिंदु हैं, सिद्ध हुआ।

bindaeducation.org

प्रश्न 3

प्रश्न : AD, त्रिभुज ABC की माध्यिका है। B और C से AD पर खींची गई सबसे छोटी दूरियाँ क्रमशः BP और CQ हैं। सिद्ध करो कि BP = CQ।



चित्र 17 : माध्यिका AD, BP ⊥ AD और CQ ⊥ AD

दिया है : AD, ΔABC की माध्यिका है, इसलिए D, BC का मध्य बिंदु है और BD = DC है। BP और CQ, AD पर खींची गई सबसे छोटी दूरियाँ हैं, इसलिए BP ⊥ AD और CQ ⊥ AD है।

biharieducation.org

सिद्ध करना है : BP = CQ।

ΔBPD और ΔCQD में

∠BPD = ∠CQD = 90° है, क्योंकि BP ⊥ AD और CQ ⊥ AD है।

∠BDP = ∠CDQ है, क्योंकि ये शीर्षाभिमुख कोण हैं।

BD = DC है, क्योंकि AD माध्यिका है।

इसलिए ΔBPD ≅ ΔCQD है (कोण कोण भुजा सर्वांगसमता से)।

सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ बराबर होती हैं।

⇒ BP = CQ

∴ BP = CQ सिद्ध हुआ।

परीक्षा में ध्यान देने वाली बातें : त्रिभुज असमिका से जुड़े हर प्रश्न में पहले तीनों जोड़ी जाँचो। बहुभुज के कोणों वाले प्रश्नों में पहले सूत्र (n − 2) × 180° से कुल योग निकालो, फिर पूछी गई बात निकालो। समबहुभुज में अंतःकोण और बहिष्कोण का योग हमेशा 180° होता है, और सभी बहिष्कोणों का योग हमेशा

360° होता है। सिद्ध करने वाले प्रश्नों में दिया है, रचना और सिद्ध करना है, तीनों साफ साफ लिखो, और हर कदम का कारण कोष्ठक में लिखो।

birlaeducation.org