WBBSE (माध्यमिक)

कक्षा 10 गणित

अध्याय 7

वृत्त के कोणों से संबंधित प्रमेय

birlaeducation.org

Full Solution : पूरा हल

कषे देखी 7 + स्वयं करो

परीक्षा की कॉपी में लिखने जैसा हल, हिंदी में

बिरला एजुकेशन

कक्षा 10 गणित : अध्याय 7

वृत्त के कोणों से संबंधित प्रमेय

कषे देखी 7 और स्वयं करो : पूरा हल

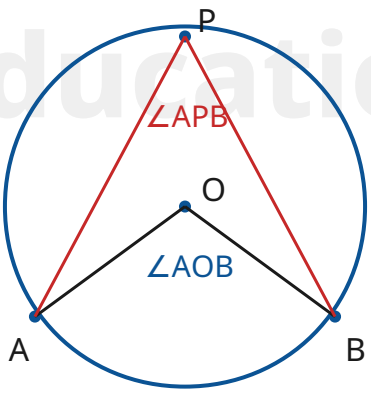
प्रश्न → चित्र → दिया है → सूत्र और गणना → ∴ उत्तर

पहले ये बातें याद कर लें

वृत्त की कुछ परिभाषाएँ : वृत्त के केंद्र से परिधि तक की दूरी **त्रिज्या** कहलाती है। परिधि के दो बिंदुओं को जोड़ने वाली रेखा **जीवा** कहलाती है। केंद्र से होकर जाने वाली सबसे बड़ी जीवा **व्यास** कहलाती है। व्यास = 2 x त्रिज्या। परिधि का कोई भाग **चाप** कहलाता है। चाप और दो त्रिज्याओं से घिरा भाग **त्रिज्यखंड** कहलाता है, और चाप और जीवा से घिरा भाग **वृत्तखंड** कहलाता है।

केंद्र पर बना कोण और परिधि पर बना कोण : किसी चाप से केंद्र पर बना कोण, उसी चाप से परिधि पर बने कोण का **दुगुना** होता है। यही इस अध्याय की सबसे बड़ी प्रमेय है। एक ही चाप से परिधि पर बने सभी कोण आपस में **बराबर** होते हैं।

birlaeducation.org



चित्र 1 : चाप AB से केंद्र पर बना कोण ∠AOB, परिधि पर बने कोण ∠APB का दुगुना होता है

तीन बड़ी प्रमेय

1. केंद्र का कोण = 2 x परिधि का कोण (एक ही चाप से)

2. अर्धवृत्त का कोण = 90° (समकोण)

3. एक ही चाप के सभी परिधि कोण बराबर होते हैं

चक्रीय चतुर्भुज : जिस चतुर्भुज के चारों शीर्ष एक ही वृत्त पर हों, वह **चक्रीय चतुर्भुज** कहलाता है। उसके आमने सामने के कोणों का योग 180° होता है। किसी चतुर्भुज के आमने सामने के कोणों का योग 180° हो, तो वह चक्रीय होता है।

वृत्तखंड के कोण : अर्धवृत्त से बड़े वृत्तखंड (दीर्घ वृत्तखंड) का कोण **न्यून कोण** होता है, और अर्धवृत्त से छोटे वृत्तखंड (लघु वृत्तखंड) का कोण **अधिक कोण** होता है। कर्ण को व्यास बनाकर खींचा गया वृत्त समकोण वाले शीर्ष से होकर जाता है।

ध्यान दो : केंद्र का कोण हमेशा उसी चाप से लेना है जिस चाप से परिधि का कोण बना है। बड़ी चाप से केंद्र पर प्रतिवर्ती कोण (reflex angle, 180° से बड़ा) बनता है, उसे 360° में से घटाना मत भूलो। समद्विबाहु त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सामने के कोण बराबर होते हैं, इसका इस्तेमाल हर प्रश्न में होगा।

स्वयं करो (Do It Yourself)

अध्याय के बीच में दिए गए स्वयं करने वाले प्रश्न : हर एक का पूरा हल नीचे है।

स्वयं करो 1 : खाली जगह भरो

प्रश्न : साथ वाले चित्र में चाप APB से बना ∠AMB _____ कोण है, और चाप AQB से बना ∠ANB वृत्त का _____ कोण है।

दिया है : बिंदु M और N वृत्त की परिधि पर हैं, चाप APB और चाप AQB दो अलग चाप हैं।
∠AMB परिधि पर बना कोण है, इसलिए यह **वृत्तस्थ कोण** है।
∠ANB चाप AQB के सामने परिधि पर बना कोण है, इसलिए यह वृत्त का **सम्मुख कोण** है।

∴ ∠AMB वृत्तस्थ कोण है और ∠ANB सम्मुख कोण है

birlaeducation.org

स्वयं करो 2 : जीवा से बने कोण

प्रश्न : चित्र में जीवा ST से बिंदु L पर बना ∠SLT _____ कोण है। बिंदु L वृत्त पर है, इसलिए जीवा ST से बना ∠SLT वृत्तखंड में _____ कोण है। फिर चाप SNT से बना ∠SLT वृत्त का _____ कोण है। केंद्र O वाले वृत्त के वृत्तखंड में बने चार कोण _____ , _____ , _____ और _____ हैं।

दिया है : L वृत्त की परिधि पर है, ST एक जीवा है।

जीवा ST से बिंदु L पर बना ∠SLT परिधि पर बना कोण है, इसलिए यह **वृत्तस्थ कोण** है।

बिंदु L वृत्त पर है, इसलिए ∠SLT वृत्तखंड में बना **वृत्तस्थ कोण** है।

चाप SNT से बना ∠SLT वृत्त का **सम्मुख कोण** है।

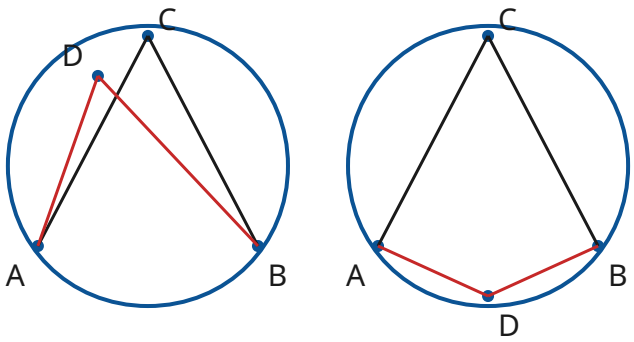
केंद्र O वाले वृत्त के वृत्तखंड में बने चार कोण ∠ADB, ∠AEB, ∠ACB और ∠ASB हैं।

∴ ∠SLT वृत्तस्थ कोण है, और चार कोण ∠ADB, ∠AEB, ∠ACB, ∠ASB हैं

birlaeducation.org

स्वयं करो 3 : वृत्तखंड में दो कोण बनाओ

प्रश्न : एक वृत्त बनाओ और उसमें वृत्तखंड के दो कोण बनाओ, (a) जो एक ही चाप से बने हों, (b) जो एक ही चाप से न बने हों।



चित्र 2 : बायाँ चित्र (a) एक ही चाप AB के कोण, दायाँ चित्र (b) अलग अलग चाप के कोण

दिया है : एक वृत्त, उसमें जीवा AB है।

(a) परिधि पर दो बिंदु C और D लो, जो चाप AB के एक ही ओर हों।

∠ACB और ∠ADB दोनों एक ही चाप AB से बने हैं, इसलिए ये **बराबर** होते हैं।

(b) परिधि पर एक बिंदु C चाप AB के एक ओर और दूसरा बिंदु D दूसरी ओर लो।

∠ACB और ∠ADB अब अलग अलग चाप से बने हैं, इसलिए ये बराबर नहीं होते।

pinnacleeducation.org

∴ एक ही चाप के वृत्तस्थ कोण बराबर होते हैं, अलग चाप के नहीं

स्वयं करो 4 : केंद्र का कोण और वृत्तस्थ कोण बनाओ

प्रश्न : एक वृत्त बनाओ और उसमें केंद्र पर बना कोण और वृत्तखंड में बना कोण बनाओ, (a) जो एक ही चाप से बने हों, (b) जो एक ही चाप से न बने हों।

दिया है : केंद्र O वाला एक वृत्त है।

(a) परिधि पर दो बिंदु A और B लो। OA और OB जोड़ो, तो ∠AOB केंद्र पर बना कोण है। परिधि पर एक बिंदु P लो और PA, PB जोड़ो, तो ∠APB वृत्तस्थ कोण है। दोनों एक ही चाप AB से बने हैं, इसलिए ∠AOB = 2 x ∠APB।

(b) परिधि पर एक और बिंदु Q इस तरह लो कि ∠AQB किसी दूसरी चाप से बने। तब ∠AOB और ∠AQB एक ही चाप से नहीं बने हैं, इसलिए इनमें दुगुना संबंध नहीं होता।

∴ एक ही चाप से केंद्र का कोण, परिधि के कोण का दुगुना होता है

स्वयं करो 5 : चित्र देखकर बताओ

प्रश्न : चित्र देखकर बताओ (O वृत्त का केंद्र है) : (i) चाप APB से केंद्र पर बना कोण कौन सा है, (ii) चाप AQB से वृत्तखंड में बना कोण कौन सा है, (iii) से (v) तक बताओ कि कौन से कोण किस चाप से बने हैं। चित्र (i) और (ii) में कौन से दो कोण एक ही चाप से बने हैं?

birlaeducation.org

दिया है : O वृत्त का केंद्र है, चित्र में कई कोण बने हैं।

(i) चाप APB से केंद्र पर बना कोण ∠AOB है।

(ii) चाप AQB से वृत्तखंड में बना कोण ∠APB है।

(iii) चित्र (iii) में ∠ADB चाप AQB से बना चक्रीय कोण है।

(iv) चित्र (iv) में ∠ACB चाप APB से बना चक्रीय कोण है।

(v) चित्र (v) में ∠ADB चाप AQB से बना कोण नहीं है।

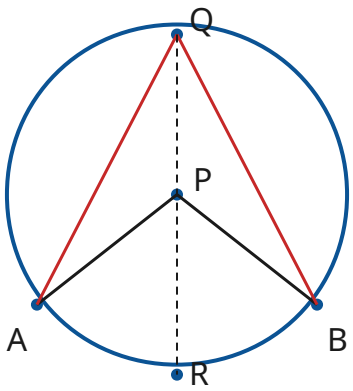
चित्र (i) में ∠ACB और ∠ADB एक ही चाप से बने दो कोण हैं।

चित्र (ii) में ∠ACB और ∠ADB वृत्तखंड ADCB में बने दो कोण हैं।

∴ (i) ∠AOB, (ii) ∠APB; एक ही चाप के कोण बराबर होते हैं

स्वयं करो 6 : केंद्र का कोण, परिधि के कोण का दुगुना होता है

प्रश्न : केंद्र P वाला एक वृत्त बनाओ। चाप ACB से केंद्र पर ∠APB और परिधि पर ∠AQB बनाकर सिद्ध करो कि ∠APB = 2 x ∠AQB है।



चित्र 3 : QP को बढ़ाकर R तक ले जाया गया है

दिया है : केंद्र P वाले वृत्त में चाप ACB से ∠APB केंद्र पर और ∠AQB परिधि पर बना है।

सिद्ध करना है : ∠APB = 2 x ∠AQB।

रचना : Q और P को जोड़कर R तक बढ़ाओ।

त्रिभुज APQ में AP = PQ, क्योंकि एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

इसलिए ∠PAQ = ∠AQP।

QP को R तक बढ़ाया गया है, इसलिए बहिष्कोण ∠APR = ∠PAQ + ∠AQP = 2 x ∠AQP।

इसी तरह त्रिभुज BQP से ∠BPR = 2 x ∠BQP।

इसलिए ∠APB = ∠APR + ∠BPR = 2 x (∠AQP + ∠BQP)।

∠AQP + ∠BQP = ∠AQB है।

∴ ∠APB = 2 x ∠AQB सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

स्वयं करो 7 : ∠BOC का मान निकालो

प्रश्न : केंद्र O वाला वृत्त A, B और C तीनों बिंदुओं से होकर जाता है। यदि ∠ABO = 35° और ∠ACO = 45° हो, तो ∠BOC का मान निकालो।

दिया है : ∠ABO = 35°, ∠ACO = 45°।

त्रिभुज OAB में OA = OB, क्योंकि एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

इसलिए ∠OAB = ∠OBA = 35°।

त्रिभुज OAC में OA = OC, क्योंकि एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

इसलिए ∠OAC = ∠OCA = 45°।

इसलिए ∠BAC = ∠OAB + ∠OAC = 35° + 45° = 80°।

∠BOC चाप BC से केंद्र पर बना कोण है और ∠BAC उसी चाप से परिधि पर बना कोण है।

इसलिए ∠BOC = 2 x ∠BAC = 2 x 80° = 160°।

∴ ∠BOC = 160°

स्वयं करो 8 : x और y का मान निकालो

birlaeducation.org

प्रश्न : नीचे दिए गए दो चित्रों से x और y का मान निकालो। O वृत्त का केंद्र है। पहले चित्र में ∠AOC = 140° और ∠AOB = 100° है, और x = ∠BAC है। दूसरे चित्र में प्रतिवर्ती कोण 120° है, और y = ∠APB है।

दिया है : O वृत्त का केंद्र है।

पहला चित्र : त्रिभुज OAC में OA = OC, इसलिए ∠OAC = ∠OCA।

∠OAC = (180° - 140°) / 2 = 20°।

त्रिभुज OAB में OA = OB, इसलिए ∠OBA = ∠OAB।

∠OAB = (180° - 100°) / 2 = 40°।

इसलिए x = ∠BAC = 20° + 40° = 60°।

दूसरा चित्र : प्रतिवर्ती ∠AOB = 360° - 120° = 240°।

∠APB उसी चाप से परिधि पर बना कोण है, इसलिए y = (1/2) x 240° = 120°।

∴ x = 60° और y = 120°

स्वयं करो 9 : समद्विबाहु त्रिभुज और वृत्त

प्रश्न : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है। त्रिभुज DBC इस तरह बनाया गया है कि त्रिभुज DBC और त्रिभुज ABC, BC के एक ही ओर हैं और ∠BAC = 2 x ∠BDC है। सिद्ध करो कि A को केंद्र और AB को त्रिज्या मानकर खींचा गया वृत्त बिंदु D से होकर जाता है, यानी बिंदु D उस वृत्त पर स्थित है।

दिया है : AB = AC, ∠BAC = 2 x ∠BDC है।

सिद्ध करना है : केंद्र A और त्रिज्या AB वाला वृत्त बिंदु D से होकर जाता है।

मान लो वृत्त बिंदु D से होकर नहीं जाता है, और BD को बिंदु D' पर काटता है।

C और D' को जोड़ो।

∠BAC केंद्र पर बना कोण है और ∠BD'C उसी चाप से परिधि पर बना कोण है।

इसलिए ∠BAC = 2 x ∠BD'C।

पर दिया है ∠BAC = 2 x ∠BDC, इसलिए ∠BD'C = ∠BDC।

यह संभव नहीं है, क्योंकि त्रिभुज DD'C का बहिष्कोण ∠BD'C उसके सम्मुख अंत:कोण ∠BDC से बड़ा होता है।

इसलिए D' और D एक ही बिंदु हैं, यानी बिंदु D वृत्त पर स्थित है।

∴ बिंदु D केंद्र A वाले वृत्त पर स्थित है, सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

स्वयं करो 10 : एक ही चाप के कोण बराबर होते हैं

प्रश्न : सिद्ध करो कि एक ही चाप से वृत्त पर बने सभी कोण बराबर होते हैं।

दिया है : केंद्र O वाले वृत्त में ∠ACB और ∠ADB एक ही चाप APB से परिधि पर बने दो कोण हैं।

सिद्ध करना है : ∠ACB = ∠ADB।

रचना : O, A और O, B को जोड़ो।

चाप APB से केंद्र पर बना कोण ∠AOB है, और परिधि पर बने कोण ∠ACB और ∠ADB हैं।

इसलिए ∠AOB = 2 x ∠ACB और ∠AOB = 2 x ∠ADB।

इसलिए 2 x ∠ACB = 2 x ∠ADB।

∴ ∠ACB = ∠ADB सिद्ध हुआ

स्वयं करो 11 : बराबर कोण हों तो चाप बराबर होती हैं

प्रश्न : सिद्ध करो कि यदि किसी वृत्त की चापों से बने परिधि के कोण बराबर हों, तो उन चापों की लंबाई भी बराबर होती है।

दिया है : केंद्र O वाले वृत्त में ∠ACB = ∠ADB = ∠AEB है।

सिद्ध करना है : इन कोणों वाली चापों की लंबाई बराबर है।

परिधि का कोण केंद्र के कोण का आधा होता है।

इसलिए ∠AOB = 2 x ∠ACB = 2 x ∠ADB = 2 x ∠AEB।

एक ही वृत्त में बराबर केंद्रीय कोणों वाली चापों की लंबाई बराबर होती है।

इसलिए तीनों कोण एक ही चाप APB से बने हैं, और चापों की लंबाई बराबर है।

∴ बराबर परिधि कोणों वाली चापों की लंबाई बराबर होती है, सिद्ध हुआ

स्वयं करो 12 : लघु वृत्तखंड का कोण अधिक कोण होता है

प्रश्न : सिद्ध करो कि अर्धवृत्त से छोटे वृत्तखंड का कोण अधिक कोण होता है।

birlaeducation.org

दिया है : O वृत्त का केंद्र है, वृत्तखंड ACB अर्धवृत्त से छोटा है।

सिद्ध करना है : ∠ACB अधिक कोण है।

चाप ADB दीर्घ चाप है।

उस चाप से केंद्र पर बना प्रतिवर्ती ∠AOB दो समकोणों से बड़ा है।

∠ACB उसी चाप से परिधि पर बना कोण है, इसलिए ∠ACB = (1/2) x प्रतिवर्ती ∠AOB।

प्रतिवर्ती ∠AOB 180° से बड़ा है, इसलिए ∠ACB 90° से बड़ा है।

∴ ∠ACB अधिक कोण है, सिद्ध हुआ

स्वयं करो 13 : कर्ण को व्यास बनाकर खींचा गया वृत्त

प्रश्न : सिद्ध करो कि समकोण त्रिभुज के कर्ण को व्यास बनाकर खींचा गया वृत्त समकोण वाले शीर्ष से होकर जाता है।

दिया है : त्रिभुज ABC में ∠BAC = 90° है, BC कर्ण है।

सिद्ध करना है : BC को व्यास बनाकर खींचा गया वृत्त बिंदु A से होकर जाता है।

मान लो वृत्त बिंदु A से होकर नहीं जाता है, और BA को बिंदु D पर काटता है।

∠BDC अर्धवृत्त का कोण है, इसलिए ∠BDC = 90° है।

पर दिया है ∠BAC = 90° है, इसलिए ∠BAC = ∠BDC।

यह संभव नहीं है, क्योंकि त्रिभुज ADC का बहिष्कोण ∠BDC उसके सम्मुख अंत:कोण ∠BAC से बड़ा होता है, जब तक D और A एक ही बिंदु न हों।

इसलिए वृत्त बिंदु A से होकर जाता है।

∴ कर्ण को व्यास बनाकर खींचा गया वृत्त समकोण वाले शीर्ष से होकर जाता है, सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

कषे देखी 7

कषे देखी 7.1

प्रश्न 1 : ∠ABC और ∠ABO का मान निकालो

प्रश्न : O, समद्विबाहु त्रिभुज ABC का परिकेंद्र है, जिसमें AB = AC है, और बिंदु A, B, C केंद्र O के विपरीत ओर हैं। यदि ∠BOC = 100° हो, तो ∠ABC और ∠ABO का मान निकालो।

दिया है : ∠BOC = 100°, AB = AC है।

∠BOC चाप BC से केंद्र पर बना कोण है और ∠BAC उसी चाप से परिधि पर बना कोण है।

इसलिए ∠BAC = (1/2) x ∠BOC = (1/2) x 100° = 50°।

AB = AC है, इसलिए ∠ABC = ∠ACB।

त्रिभुज ABC में ∠BAC + ∠ABC + ∠ACB = 180°।

इसलिए 50° + 2 x ∠ABC = 180°, इसलिए 2 x ∠ABC = 130°, इसलिए ∠ABC = 65°।

त्रिभुज OBC में OB = OC, इसलिए ∠OBC = ∠OCB।

त्रिभुज BOC में 100° + 2 x ∠OBC = 180°, इसलिए ∠OBC = 40°।

इसलिए ∠ABO = ∠ABC - ∠OBC = 65° - 40° = 25°।

birlaeducation.org

∴ ∠ABC = 65° और ∠ABO = 25°

प्रश्न 2 : ∠ABC का मान निकालो

प्रश्न : साथ वाले चित्र में O, त्रिभुज ABC के परिवृत्त का केंद्र है और ∠AOC = 110° है, तो ∠ABC का मान निकालो।

दिया है : ∠AOC = 110° है।

प्रतिवर्ती ∠AOC = 360° - 110° = 250°।

∠ABC उसी चाप से परिधि पर बना कोण है, इसलिए ∠ABC = (1/2) x प्रतिवर्ती ∠AOC।

इसलिए ∠ABC = (1/2) x 250° = 125°।

∴ ∠ABC = 125°

प्रश्न 3 : ∠BOD का मान निकालो

प्रश्न : ABCD, केंद्र O वाले वृत्त का एक चक्रीय चतुर्भुज है। DC को बिंदु P तक बढ़ाया गया है। यदि ∠BCP = 108° हो, तो ∠BOD का मान निकालो।

दिया है : ABCD चक्रीय चतुर्भुज है, ∠BCP = 108° है।

∠BCD + ∠BCP = 180°, क्योंकि ये एक सरल रेखा पर बने कोण हैं।

इसलिए ∠BCD = 180° - 108° = 72°।

∠BOD चाप BCD से केंद्र पर बना कोण है और ∠BCD उसी चाप से परिधि पर बना कोण है।

इसलिए ∠BOD = 2 x ∠BCD = 2 x 72° = 144°।

प्रतिवर्ती ∠BOD = 360° - 144° = 216°।

∴ ∠BOD = 144°

प्रश्न 4 : ∠BCO और ∠BOD का मान निकालो

प्रश्न : O वृत्त का केंद्र है, ∠AOD = 40° और ∠ACB = 35° है, तो ∠BCO और ∠BOD का मान निकालो और कारण सहित उत्तर दो।

bihaeducation.org

दिया है : ∠AOD = 40°, ∠ACB = 35° है।

रचना : CD को बढ़ाओ, जो वृत्त को बिंदु E पर काटती है।

∠AOE केंद्र पर बना कोण है और ∠ACE उसी चाप AE से परिधि पर बना कोण है।

इसलिए ∠ACE = (1/2) x ∠AOE = (1/2) x 40° = 20°।

इसलिए ∠BCO = ∠BCA + ∠ACO = 35° + 20° = 55°।

∠AOB केंद्र पर बना कोण है और ∠ACB उसी चाप से परिधि पर बना कोण है।

इसलिए ∠AOB = 2 x ∠ACB = 2 x 35° = 70°।

इसलिए ∠BOD = ∠AOB + ∠AOD = 70° + 40° = 110°।

∴ ∠BCO = 55° और ∠BOD = 110°

प्रश्न 5 : ∠AOB और ∠COD के योग का मान निकालो

प्रश्न : चित्र में O वृत्त का केंद्र है, यदि ∠APB = 80° हो, तो ∠AOB और ∠COD के मापों का योग निकालो और कारण सहित उत्तर दो।

दिया है : O वृत्त का केंद्र है, ∠APB = 80° है।

B और C को जोड़ो।

∠AOB केंद्र पर बना कोण है और ∠ACB उसी चाप AB से परिधि पर बना कोण है।

इसलिए ∠AOB = 2 x ∠ACB।

∠COD केंद्र पर बना कोण है और ∠CBD उसी चाप CD से परिधि पर बना कोण है।

इसलिए ∠COD = 2 x ∠CBD।

इसलिए ∠AOB + ∠COD = 2 x (∠ACB + ∠CBD)।

त्रिभुज BCP में CP को A तक बढ़ाया गया है, इसलिए बहिष्कोण ∠APB = ∠PCB + ∠PBC।

इसलिए ∠ACB + ∠DBC = ∠APB = 80°।

इसलिए ∠AOB + ∠COD = 2 x 80° = 160°।

∴ ∠AOB + ∠COD = 160°

birlaeducation.org

प्रश्न 6 : दो वृत्तों के कोण सिद्ध करो

प्रश्न : चित्र की तरह केंद्र C और D वाले दो वृत्त एक दूसरे को बिंदु A और B पर काटते हैं। बिंदु A से होकर एक सरल रेखा खींची गई है, जो केंद्र C वाले वृत्त को बिंदु P पर और केंद्र D वाले वृत्त को बिंदु Q पर काटती है। सिद्ध करो कि : (i) ∠PBQ = ∠CAD, (ii) ∠BPC = ∠BQD।

दिया है : दो वृत्त केंद्र C और D वाले, बिंदु A और B पर काटते हैं। रेखा PAQ, वृत्तों को P और Q पर काटती है।

रचना : A, B; A, C; P, C; A, D; D, Q; B, P; B, Q; B, C; B, D को जोड़ो।

केंद्र C वाले वृत्त में ∠ACP केंद्र पर बना कोण है और ∠ABP उसी चाप AP से परिधि पर बना कोण है।

इसलिए ∠ABP = (1/2) x ∠ACP, और CA = CP होने से ∠CAP = ∠CPA।

त्रिभुज CAP में ∠CAP + ∠CPA + ∠ACP = 180°, इसलिए 2 x ∠CAP = 180° - ∠ACP।

इसलिए ∠CAP = 90° - (1/2) x ∠ACP = 90° - ∠ABP।

इसी तरह केंद्र D वाले वृत्त से ∠DAQ = 90° - ∠ABQ।

दोनों को जोड़ने पर ∠CAP + ∠DAQ = 180° - (∠ABP + ∠ABQ) = 180° - ∠PBQ।

पर ∠CAP + ∠DAQ = 180° - ∠CAD है, इसलिए ∠PBQ = ∠CAD। यही (i) सिद्ध हुआ।

त्रिभुज ABC में CA = CB होने से ∠CAB = ∠CBA, और त्रिभुज DAB में DA = DB होने से ∠DAB = ∠DBA।

इसलिए ∠CAD = ∠CBD।

∠CAD = ∠PBQ पहले सिद्ध हो चुका है, इसलिए ∠CBD = ∠PBQ।

bindaeducation.org

इसलिए ∠CBP = ∠DBQ।

BC = PC होने से ∠BPC = ∠CBP, और BD = DQ होने से ∠DBQ = ∠BQD।

इसलिए ∠BPC = ∠BQD। यही (ii) सिद्ध हुआ।

∴ (i) ∠PBQ = ∠CAD और (ii) ∠BPC = ∠BQD सिद्ध हुए

प्रश्न 7 : ∠OBC + ∠BAC = 90° सिद्ध करो

प्रश्न : यदि O, त्रिभुज ABC का परिकेंद्र हो, तो सिद्ध करो कि ∠OBC + ∠BAC = 90° है।

दिया है : O, त्रिभुज ABC का परिकेंद्र है।

सिद्ध करना है : ∠OBC + ∠BAC = 90°।

∠BOC केंद्र पर बना कोण है और ∠BAC उसी चाप से परिधि पर बना कोण है।

इसलिए ∠BAC = (1/2) x ∠BOC।

त्रिभुज OBC में OB = OC, इसलिए ∠OBC = ∠OCB।

त्रिभुज OBC में ∠OBC + ∠OCB + ∠BOC = 180°, इसलिए 2 x ∠OBC + ∠BOC = 180°।

इसलिए ∠OBC = 90° - (1/2) x ∠BOC = 90° - ∠BAC।

इसलिए ∠OBC + ∠BAC = 90°।

∴ ∠OBC + ∠BAC = 90° सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

प्रश्न 8 : त्रिभुज BCD समबाहु है, सिद्ध करो

प्रश्न : दो बराबर वृत्तों में से प्रत्येक दूसरे के केंद्र से होकर जाता है, और दोनों वृत्त एक दूसरे को बिंदु A और B पर काटते हैं। बिंदु A से होकर जाने वाली एक सरल रेखा दोनों वृत्तों को बिंदु C और D पर काटती है, तो सिद्ध करो कि त्रिभुज BCD एक समबाहु त्रिभुज है।

दिया है : P और Q दो बराबर वृत्तों के केंद्र हैं, प्रत्येक वृत्त दूसरे के केंद्र से होकर जाता है, वृत्त A और B पर काटते हैं।
A, P; A, Q; B, P; B, Q; A, B; P, Q को जोड़ो।
AP = BP = AB = AQ = BQ = PQ है, क्योंकि दोनों वृत्त बराबर हैं और प्रत्येक दूसरे के केंद्र से होकर जाता है।
इसलिए त्रिभुज APQ और त्रिभुज BPQ समबाहु त्रिभुज हैं।
इसलिए ∠PAQ = ∠APQ = ∠AQP = ∠PBQ = ∠BPQ = ∠BQP = 60°।
इसलिए ∠APB = ∠APQ + ∠BPQ = 60° + 60° = 120°, और ∠AQB = 120°।
केंद्र P वाले वृत्त में ∠APB केंद्र पर बना कोण है और ∠ADB उसी चाप से परिधि पर बना कोण है।
इसलिए ∠ADB = (1/2) x 120° = 60°, यानी ∠CDB = 60°।
केंद्र Q वाले वृत्त में ∠ACB = (1/2) x प्रतिवर्ती ∠AQB = (1/2) x 240° = 120°।
इसलिए ∠BCD = 180° - 120° = 60°।
त्रिभुज BCD में ∠CDB = ∠BCD = 60°, इसलिए ∠DBC = 180° - 120° = 60°।
तीनों कोण बराबर हैं।

birlaeducation.org

∴ त्रिभुज BCD समबाहु त्रिभुज है, सिद्ध हुआ

प्रश्न 9 : ∠BAD = ∠SAC सिद्ध करो

प्रश्न : S, त्रिभुज ABC के परिवृत्त का केंद्र है, और AD, BC पर लंब है, तो सिद्ध करो कि ∠BAD = ∠SAC है।

दिया है : S, त्रिभुज ABC का परिकेंद्र है, AD, BC पर लंब है।

सिद्ध करना है : ∠BAD = ∠SAC।

S, A और S, C को जोड़ो।

SA = SC, क्योंकि एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं, इसलिए ∠SAC = ∠SCA।

त्रिभुज SAC में ∠ASC + ∠SAC + ∠SCA = 180°, इसलिए ∠ASC + 2 x ∠SAC = 180°।

इसलिए ∠SAC = 90° - (1/2) x ∠ASC।

केंद्र S वाले वृत्त में ∠ASC केंद्र पर बना कोण है और ∠ABC उसी चाप से परिधि पर बना कोण है।

इसलिए ∠ABC = (1/2) x ∠ASC, इसलिए ∠SAC = 90° - ∠ABC।

त्रिभुज ABD में ∠ADB = 90° है, इसलिए ∠BAD = 90° - ∠ABD = 90° - ∠ABC।

इसलिए ∠SAC = ∠BAD।

∴ ∠BAD = ∠SAC सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

प्रश्न 10 : ∠AOD + ∠BOC = 2 x ∠BPC सिद्ध करो

प्रश्न : केंद्र O वाले वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को बिंदु P पर काटती हैं, तो सिद्ध करो कि ∠AOD + ∠BOC = 2 x ∠BPC है। यदि ∠AOD और ∠BOC एक दूसरे के संपूरक हों, तो सिद्ध करो कि दोनों जीवाएँ एक दूसरे पर लंब हैं।

दिया है : जीवाएँ AB और CD बिंदु P पर काटती हैं।

रचना : O, A; O, B; O, C; O, D और B, D को जोड़ो।

∠AOD केंद्र पर बना कोण है और ∠ABD उसी चाप से परिधि पर बना कोण है।

इसलिए ∠ABD = (1/2) x ∠AOD, यानी ∠AOD = 2 x ∠ABD।

इसी तरह ∠BOC = 2 x ∠BDC।

इसलिए ∠AOD + ∠BOC = 2 x (∠ABD + ∠BDC) = 2 x (∠PBD + ∠BDP)।

त्रिभुज PBD में बहिष्कोण ∠BPC = ∠PBD + ∠BDP।

इसलिए ∠AOD + ∠BOC = 2 x ∠BPC। पहला भाग सिद्ध हुआ।

यदि ∠AOD + ∠BOC = 180° हो, तो 2 x ∠BPC = 180°, इसलिए ∠BPC = 90°।

इसलिए BP, PC पर लंब है, यानी दोनों जीवाएँ AB और CD एक दूसरे पर लंब हैं। दूसरा भाग सिद्ध हुआ।

∴ ∠AOD + ∠BOC = 2 x ∠BPC सिद्ध हुआ, और संपूरक होने पर जीवाएँ लंब होती हैं

birlaeducation.org

प्रश्न 11 : ∠AOC - ∠BOD = 2 x ∠BPC सिद्ध करो

प्रश्न : यदि केंद्र O वाले वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD बढ़ाने पर एक दूसरे को बिंदु P पर काटती हैं, तो सिद्ध करो कि ∠AOC - ∠BOD = 2 x ∠BPC है।

दिया है : जीवाएँ AB और CD बढ़ाने पर बिंदु P पर काटती हैं, जो वृत्त के बाहर है।

रचना : O, A; O, B; O, C; O, D और A, D को जोड़ो।

∠AOC केंद्र पर बना कोण है और ∠ADC उसी चाप से परिधि पर बना कोण है, इसलिए ∠AOC = 2 x ∠ADC।

∠BOD केंद्र पर बना कोण है और ∠BAD उसी चाप से परिधि पर बना कोण है, इसलिए ∠BOD = 2 x ∠BAD।

इसलिए ∠AOC - ∠BOD = 2 x (∠ADC - ∠BAD)।

त्रिभुज APD में बहिष्कोण ∠ADC = ∠APD + ∠PAD, इसलिए ∠APD = ∠ADC - ∠PAD।

∠PAD = ∠BAD है, और ∠APD = ∠BPC है, क्योंकि P, A, B एक ही रेखा पर हैं और P, C, D एक ही रेखा पर हैं।

इसलिए ∠AOC - ∠BOD = 2 x ∠BPC।

∴ ∠AOC - ∠BOD = 2 x ∠BPC सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

प्रश्न 12 : ∠CBD + ∠CDB = (1/2) x ∠BAD सिद्ध करो

प्रश्न : चतुर्भुज ABCD के बिंदु A को केंद्र मानकर एक वृत्त बनाया गया है, जो बिंदु B, C और D से होकर जाता है। सिद्ध करो कि ∠CBD + ∠CDB = (1/2) x ∠BAD है।

दिया है : केंद्र A वाला वृत्त बिंदु B, C, D से होकर जाता है।

सिद्ध करना है : ∠CBD + ∠CDB = (1/2) x ∠BAD।

∠BCD चाप BD से परिधि पर बना कोण है, और प्रतिवर्ती ∠BAD उसी चाप से केंद्र पर बना कोण है।

इसलिए ∠BCD = (1/2) x (360° - ∠BAD) = 180° - (1/2) x ∠BAD।

त्रिभुज BCD में ∠BDC + ∠CBD + ∠BCD = 180°।

इसलिए ∠CBD + ∠CDB = 180° - ∠BCD = 180° - (180° - (1/2) x ∠BAD) = (1/2) x ∠BAD।

∴ ∠CBD + ∠CDB = (1/2) x ∠BAD सिद्ध हुआ

प्रश्न 13 : ∠BOD = ∠BAC सिद्ध करो

प्रश्न : O, त्रिभुज ABC का परिकेंद्र है और OD, भुजा BC पर लंब है, तो सिद्ध करो कि ∠BOD = ∠BAC है।

दिया है : O, त्रिभुज ABC का परिकेंद्र है, OD, BC पर लंब है।

सिद्ध करना है : ∠BOD = ∠BAC।

त्रिभुज OBC में OB = OC है, और OD, BC पर लंब है।

इसलिए OD, ∠BOC को दो बराबर भागों में बाँटता है, यानी ∠BOD = (1/2) x ∠BOC।

∠BOC चाप BC से केंद्र पर बना कोण है और ∠BAC उसी चाप से परिधि पर बना कोण है।

इसलिए ∠BOC = 2 x ∠BAC।

इसलिए ∠BOD = (1/2) x 2 x ∠BAC = ∠BAC।

∴ ∠BOD = ∠BAC सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

कषे देखी 7.1 : अति संक्षिप्त उत्तर वाले प्रश्न

प्रश्न 14 (A) : बहुविकल्पीय प्रश्न

प्रश्न : सही उत्तर चुनो :

(i) चित्र में O वृत्त का केंद्र है और PQ व्यास है, तो x का मान है : (a) 140 (b) 40 (c) 80 (d) 20

(ii) चित्र में O वृत्त का केंद्र है, तो x का मान है : (a) 70 (b) 60 (c) 40 (d) 200

(iii) चित्र में O वृत्त का केंद्र है और BC व्यास है, तो x का मान है : (a) 60 (b) 50 (c) 100 (d) 80

(iv) O, त्रिभुज ABC का परिकेंद्र है और ∠OAB = 50° हो, तो ∠ACB का मान है : (a) 50° (b) 100° (c) 40° (d) 80°

(v) चित्र में O वृत्त का केंद्र है, तो ∠POR का मान है : (a) 20° (b) 40° (c) 60° (d) 80°

(i) चित्र में ∠ROQ = 180° - 140° = 40° है।

x = ∠RSQ = (1/2) x ∠ROQ = (1/2) x 40° = 20°। उत्तर : (d) 20।

(ii) चित्र में ∠QOR = 360° - (140° + 80°) = 140° है।

x = ∠QPR = (1/2) x ∠QOR = (1/2) x 140° = 70°। उत्तर : (a) 70।

(iii) चित्र में ∠AOC = 180° - 80° = 100° है।

x = ∠ADC = (1/2) x 100° = 50°। उत्तर : (b) 50।

(iv) त्रिभुज OAB में OA = OB, इसलिए ∠OBA = ∠OAB = 50°।

∠AOB = 180° - (50° + 50°) = 80°।

∠ACB = (1/2) x ∠AOB = 40°। उत्तर : (c) 40°।

(v) चित्र में ∠POQ = 180° - 20° = 160° है, और ∠QOR = 180° - 80° = 100° है।

∠POR = ∠POQ - ∠QOR = 160° - 100° = 60°। उत्तर : (c) 60°।

∴ (i) (d) 20, (ii) (a) 70, (iii) (b) 50, (iv) (c) 40°, (v) (c) 60°

birlaeducation.org

प्रश्न 14 (B) : सत्य या मिथ्या लिखो

प्रश्न : नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या मिथ्या, लिखो :

(i) चित्र में O वृत्त का केंद्र है, तो ∠AOB = 2 x ∠ACD है।

(ii) बिंदु O, त्रिभुज ABC के अंदर इस तरह स्थित है कि OA = OB और ∠AOB = 2 x ∠ACB है। यदि O को केंद्र और OA को त्रिज्या मानकर वृत्त बनाया जाए, तो बिंदु C उस वृत्त पर स्थित है।

(i) केंद्र का कोण उसी चाप से परिधि पर बने कोण का दुगुना होता है। चित्र में ∠ACD वह कोण नहीं है जो चाप AB से परिधि पर बना है, इसलिए ∠AOB = 2 x ∠ACD नहीं होता।

कथन **मिथ्या** है।

(ii) ∠AOB = 2 x ∠ACB है, यानी C ठीक उसी जगह है जहाँ परिधि पर बना कोण केंद्र के कोण का आधा होता है। OA = OB = OC होने से C, O को केंद्र मानकर बनाए गए वृत्त पर स्थित है।

कथन **सत्य** है।

∴ (i) मिथ्या, (ii) सत्य

प्रश्न 14 (C) : खाली जगह भरो

birlaeducation.org

प्रश्न : खाली जगह भरो :

(i) परिधि पर बना कोण, केंद्र पर बने कोण का _____ होता है, जब दोनों एक ही चाप से बने हों।

(ii) केंद्र O वाले वृत्त की दो जीवाओं AB और CD की लंबाई बराबर है। यदि APB और AQC परिधि पर बने कोण हों, तो दोनों कोणों का मान _____ है।

(iii) यदि O, किसी समबाहु त्रिभुज का परिकेंद्र हो, तो त्रिभुज की एक भुजा से केंद्र पर बने कोण का मान _____ है।

(i) परिधि का कोण केंद्र के कोण का आधा होता है।

(ii) बराबर जीवाओं से बने परिधि के कोण बराबर होते हैं।

(iii) समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° है, इसलिए केंद्र पर बना कोण = 2 x 60° = 120°।

∴ (i) आधा, (ii) बराबर, (iii) 120°

प्रश्न 15 : संक्षिप्त उत्तर वाले प्रश्न

प्रश्न :

(i) O, त्रिभुज ABC का परिकेंद्र है और D, भुजा BC का मध्य बिंदु है। यदि ∠BAC = 40° हो, तो ∠BOD का मान निकालो।

(ii) तीन बिंदु A, B, C केंद्र O वाले वृत्त पर इस तरह स्थित हैं कि AOCB एक समांतर चतुर्भुज है, तो ∠AOC का मान निकालो।

(iii) O, समद्विबाहु त्रिभुज ABC का परिकेंद्र है, जिसमें AB = BC है और ∠ABC = 120° है। वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी हो, तो भुजा AB की लंबाई निकालो।

(i) ∠BOC = 2 x ∠BAC = 2 x 40° = 80°।

OD, BC पर लंब है और OB = OC है, इसलिए OD, ∠BOC को दो बराबर भागों में बाँटता है।

∠BOD = (1/2) x 80° = 40°।

(ii) समांतर चतुर्भुज AOCB में ∠AOC = ∠ABC है, क्योंकि ये सम्मुख कोण हैं।

∠ABC चाप ADC से परिधि पर बना कोण है, इसलिए ∠ABC = (1/2) x (360° - ∠AOC)।

इसलिए ∠AOC = 180° - (1/2) x ∠AOC, इसलिए (3/2) x ∠AOC = 180°, इसलिए ∠AOC = 120°।

(iii) AB = BC है, इसलिए ∠BAC = ∠BCA।

∠ACB = (180° - 120°) / 2 = 30°।

∠AOB = 2 x ∠ACB = 2 x 30° = 60°।

OA = OB है, इसलिए ∠OAB = ∠OBA = 60°, यानी त्रिभुज OAB समबाहु है।

इसलिए OA = OB = AB = 5 सेमी।

∴ (i) ∠BOD = 40°, (ii) ∠AOC = 120°, (iii) AB = 5 सेमी

birlaeducation.org

कषे देखी 7.2

प्रश्न 1 : ∠DCA और ∠BCA का मान निकालो

प्रश्न : साथ वाले चित्र में ∠DBA = 40°, ∠BAC = 60° और ∠CAD = 20° है, तो ∠DCA और ∠BCA का मान निकालो। ∠BAD और ∠DCB का योग भी निकालो।

दिया है : ∠DBA = 40°, ∠BAC = 60°, ∠CAD = 20° है।

∠DCA और ∠DBA एक ही चाप CD से परिधि पर बने कोण हैं।

इसलिए ∠DCA = ∠DBA = 40°।

∠BAD = ∠BAC + ∠CAD = 60° + 20° = 80°।

त्रिभुज ABD में ∠BAD + ∠BDA + ∠ABD = 180°।

इसलिए ∠BDA = 180° - (80° + 40°) = 60°।

∠BCA और ∠BDA एक ही चाप AB से परिधि पर बने कोण हैं, इसलिए ∠BCA = ∠BDA = 60°।

∠BCD = ∠BCA + ∠ACD = 60° + 40° = 100°।

इसलिए ∠BAD + ∠BCD = 80° + 100° = 180°।

∴ ∠DCA = 40°, ∠BCA = 60°, और ∠BAD + ∠DCB = 180°

birlaeducation.org

प्रश्न 2 : ∠BAC और ∠APC का मान निकालो

प्रश्न : साथ वाले चित्र में AOB वृत्त का व्यास है और O वृत्त का केंद्र है। त्रिज्या OC, AB पर लंब है। P, लघु चाप CB पर कोई बिंदु है, तो ∠BAC और ∠APC का मान निकालो।

दिया है : AOB व्यास है, OC, AB पर लंब है, इसलिए ∠AOC = ∠BOC = 90°।

त्रिभुज AOC में AO = OC, क्योंकि एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं, इसलिए ∠OAC = ∠OCA।

∠OAC + ∠OCA = 90° है, क्योंकि ∠AOC = 90° है।

इसलिए 2 x ∠OAC = 90°, इसलिए ∠OAC = ∠BAC = 45°।

इसी तरह ∠ABC = 45° है।

∠ABC और ∠APC एक ही चाप AC से परिधि पर बने कोण हैं।

इसलिए ∠APC = ∠ABC = 45°।

∴ ∠BAC = 45° और ∠APC = 45°

प्रश्न 3 : OD = DG सिद्ध करो

प्रश्न : O, त्रिभुज ABC का लंबकेंद्र है, और BC पर खींचा गया लंब AD बढ़ाने पर त्रिभुज ABC के परिवृत्त को बिंदु G पर काटता है, तो सिद्ध करो कि OD = DG है।

दिया है : O, त्रिभुज ABC का लंबकेंद्र है, AD, BC पर लंब है, AD बढ़ाने पर परिवृत्त को G पर काटता है।

सिद्ध करना है : OD = DG।

B, G और C, G को जोड़ो।

∠ACB और ∠AGB एक ही चाप AB से परिधि पर बने कोण हैं, इसलिए ∠ACB = ∠AGB।

BE, AC पर लंब है, इसलिए त्रिभुज BEC में ∠EBC = 90° - ∠ACB।

त्रिभुज BGD में ∠GBD = ∠EBC = 90° - ∠ACB, और ∠BGD = ∠AGB = ∠ACB।

त्रिभुज BOD में ∠OBD = ∠EBC = 90° - ∠ACB, और ∠ODB = 90° है।

इसलिए त्रिभुज BOD और त्रिभुज BGD में ∠OBD = ∠GBD, ∠ODB = ∠GDB = 90°, और BD उभयनिष्ठ है।

इसलिए दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं, इसलिए OD = DG।

∴ OD = DG सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

प्रश्न 4 : PB = PC = PI सिद्ध करो

प्रश्न : I, त्रिभुज ABC के अंत:वृत्त का केंद्र है। AI को बढ़ाने पर वह त्रिभुज के परिवृत्त को बिंदु P पर काटता है, तो सिद्ध करो कि PB = PC = PI है।

दिया है : I, त्रिभुज ABC का अंत:केंद्र है, AI बढ़ाने पर परिवृत्त को P पर काटता है।

सिद्ध करना है : PB = PC = PI।

B, I; C, I; P, B; P, C को जोड़ो।

त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक अंत:केंद्र पर मिलते हैं, इसलिए ∠BAI = ∠CAI = A/2, ∠ABI = ∠CBI = B/2, ∠ACI = ∠BCI = C/2 है।

P, चाप BC का मध्य बिंदु है, क्योंकि AP, ∠A का समद्विभाजक है, इसलिए PB = PC।

∠PBC और ∠PAC एक ही चाप PC से बने कोण हैं, इसलिए ∠PBC = ∠PAC = A/2।

∠IBP = ∠PBC + ∠CBI = A/2 + B/2।

त्रिभुज ABI का बहिष्कोण ∠BIP = ∠BAI + ∠ABI = A/2 + B/2।

इसलिए ∠IBP = ∠BIP, इसलिए त्रिभुज PBI में BP = PI।

इसी तरह त्रिभुज PCI में CP = PI।

इसलिए PB = PC = PI।

birlaeducation.org

∴ PB = PC = PI सिद्ध हुआ

प्रश्न 5 : ∠AQC = ∠BQD सिद्ध करो

प्रश्न : तिमिर ने दो वृत्त बनाए जो एक दूसरे को बिंदु P और Q पर काटते हैं। बिंदु P से होकर दो सरल रेखाएँ खींची गई हैं, जो एक वृत्त को बिंदु A और B पर, और दूसरे वृत्त को बिंदु C और D पर काटती हैं, तो सिद्ध करो कि ∠AQC = ∠BQD है।

दिया है : दो वृत्त P और Q पर काटते हैं, रेखाएँ PAC और PBD हैं।

सिद्ध करना है : ∠AQC = ∠BQD।

A, Q; B, Q; C, Q और D, Q को जोड़ो।

एक वृत्त में ∠PCQ और ∠PDQ एक ही चाप से बने कोण हैं, इसलिए ∠PCQ = ∠PDQ।

दूसरे वृत्त में ∠PAQ और ∠PBQ एक ही चाप से बने कोण हैं, इसलिए ∠PAQ = ∠PBQ।

दोनों को जोड़ने पर ∠PAQ + ∠PCQ = ∠PBQ + ∠PDQ।

त्रिभुज ACQ में ∠CAQ + ∠ACQ + ∠AQC = 180°, यानी ∠PAQ + ∠PCQ + ∠AQC = 180°।

त्रिभुज BDQ में ∠DBQ + ∠BDQ + ∠BQD = 180°, यानी ∠PBQ + ∠PDQ + ∠BQD = 180°।

दोनों से ∠PAQ + ∠PCQ + ∠AQC = ∠PBQ + ∠PDQ + ∠BQD।

पहला योग घटाने पर ∠AQC = ∠BQD।

∴ ∠AQC = ∠BQD सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

प्रश्न 6 : E, BC का मध्य बिंदु है, सिद्ध करो

प्रश्न : एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD एक दूसरे पर लंब हैं। उन जीवाओं के प्रतिच्छेद बिंदु से AD पर खींचा गया लंब बढ़ाने पर BC को बिंदु E पर काटता है, तो सिद्ध करो कि बिंदु E, BC का मध्य बिंदु है।

दिया है : जीवाएँ AB और CD एक दूसरे पर लंब हैं, प्रतिच्छेद बिंदु O है। O से AD पर खींचा गया लंब BC को E पर काटता है।

सिद्ध करना है : E, BC का मध्य बिंदु है।

AD पर लंब का पाद F है, इसलिए त्रिभुज AFD में $\angle AFO = 90°$ है।

$\angle FAO + \angle AOF = 90°$ है, यानी $\angle DAO + \angle DOF = 90°$।

$\angle AOF$ और $\angle EOB$ शीर्षाभिमुख कोण हैं, इसलिए $\angle EOB = \angle AOF$।

$\angle ADO$ और $\angle ABC$ एक ही चाप AC से बने कोण हैं, इसलिए $\angle ADO = \angle ABC$।

इसलिए $\angle EOB = \angle OBE$, इसलिए त्रिभुज OEB में BE = OE।

इसी तरह $\angle COE = \angle OCE$ सिद्ध होता है, इसलिए त्रिभुज OCE में CE = OE।

इसलिए BE = CE।

∴ E, BC का मध्य बिंदु है, सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

प्रश्न 7 : AC = BD सिद्ध करो

प्रश्न : यदि चक्रीय चतुर्भुज ABCD में AB = DC हो, तो सिद्ध करो कि AC = BD है।

दिया है : ABCD चक्रीय चतुर्भुज है, AB = DC है।

सिद्ध करना है : AC = BD।

रचना : A, C और B, D को जोड़ो, AC और BD बिंदु E पर काटते हैं।

$\angle CAB$ और $\angle CDB$ एक ही चाप CB से बने कोण हैं, इसलिए $\angle CAB = \angle CDB$, यानी $\angle EAB = \angle EDC$।

त्रिभुज AEB और त्रिभुज DEC में $\angle EAB = \angle EDC$, $\angle AEB = \angle DEC$ (शीर्षाभिमुख कोण), और AB = DC है।

इसलिए दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं, इसलिए AE = DE और BE = CE।

इसलिए AC = AE + CE = DE + BE = BD।

∴ AC = BD सिद्ध हुआ

प्रश्न 8 : CP = PQ सिद्ध करो

प्रश्न : OA, केंद्र O वाले वृत्त की त्रिज्या है, AQ उसकी जीवा है, और C वृत्त पर कोई बिंदु है। O, A, C से होकर जाने वाला वृत्त जीवा AQ को बिंदु P पर काटता है, तो सिद्ध करो कि CP = PQ है।

दिया है : OA त्रिज्या है, AQ जीवा है, वृत्त OAC, AQ को P पर काटता है।

सिद्ध करना है : CP = PQ।

O, A और O, Q को जोड़ो।

OQ और OA एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं, इसलिए त्रिभुज OQA समद्विबाहु है, और ∠OQA = ∠OAQ।

OC = OQ है, इसलिए त्रिभुज OCQ समद्विबाहु है, और ∠OQC = ∠OCQ।

वृत्त OACP में ∠PCO और ∠PAO एक ही चाप OP से बने कोण हैं, इसलिए ∠PCO = ∠PAO = ∠OAQ।

∠OQC = ∠OQA + ∠AQC, और ∠OCQ = ∠OCP + ∠PCQ।

∠OQC = ∠OCQ होने से ∠OQA + ∠PQC = ∠PCQ + ∠PCO।

∠OQA = ∠PCO होने से ∠PQC = ∠PCQ।

इसलिए त्रिभुज PCQ समद्विबाहु है, इसलिए CP = PQ।

∴ CP = PQ सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

प्रश्न 9 : AX, YZ पर लंब है, सिद्ध करो

प्रश्न : त्रिभुज ABC एक वृत्त के अंदर बना है, ∠BAC, ∠ABC और ∠ACB के समद्विभाजक वृत्त को क्रमशः बिंदु X, Y, Z पर काटते हैं, तो सिद्ध करो कि AX, YZ पर लंब है।

दिया है : AX, BY, CZ कोणों के समद्विभाजक हैं, जो वृत्त को X, Y, Z पर काटते हैं।

सिद्ध करना है : AX, YZ पर लंब है।

X, Y; Y, Z; Z, X को जोड़ो, AX, YZ को बिंदु P पर काटती है।

∠XAY चाप XY से बना कोण है, चाप XY = चाप XC + चाप CY है।

X, चाप BC का मध्य बिंदु है, इसलिए चाप XC = (1/2) x चाप BC है, और Y, चाप CA का मध्य बिंदु है, इसलिए चाप CY = (1/2) x चाप CA है।

चाप BC = 2 x ∠A है और चाप CA = 2 x ∠B है, इसलिए चाप XY = ∠A + ∠B है।

इसलिए ∠XAY = (1/2) x (∠A + ∠B)।

∠AYZ चाप AZ से बना कोण है, Z, चाप AB का मध्य बिंदु है, इसलिए चाप AZ = (1/2) x चाप AB = ∠C है।

इसलिए ∠AYZ = (1/2) x ∠C।

त्रिभुज APY में ∠APY = 180° - ∠XAY - ∠AYZ = 180° - (1/2) x (∠A + ∠B + ∠C) = 180° - 90° = 90°।

इसलिए AX, YZ पर लंब है।

birlaeducation.org

∴ AX, YZ पर लंब है, सिद्ध हुआ

प्रश्न 10 : ∠YXZ = 90° - ∠BAC/2 सिद्ध करो

प्रश्न : त्रिभुज ABC एक वृत्त के अंदर बना है, ∠BAC, ∠ABC और ∠ACB के समद्विभाजक वृत्त को क्रमशः बिंदु X, Y, Z पर काटते हैं, तो सिद्ध करो कि त्रिभुज XYZ में ∠YXZ = 90° - ∠BAC/2 है।

दिया है : AX, BY, CZ कोणों के समद्विभाजक हैं, जो वृत्त को X, Y, Z पर काटते हैं।

सिद्ध करना है : ∠YXZ = 90° - ∠BAC/2।

चाप AY से ∠AXY और ∠ABY एक ही चाप से बने कोण हैं, इसलिए ∠AXY = ∠ABY = (1/2) x ∠B।

इसी तरह चाप AZ से ∠AXZ = ∠ACZ = (1/2) x ∠C।

इसलिए ∠YXZ = ∠AXY + ∠AXZ = (1/2) x ∠B + (1/2) x ∠C।

त्रिभुज ABC में (1/2) x ∠A + (1/2) x ∠B + (1/2) x ∠C = 90° है।

इसलिए (1/2) x ∠B + (1/2) x ∠C = 90° - (1/2) x ∠A।

इसलिए ∠YXZ = 90° - ∠BAC/2।

∴ ∠YXZ = 90° - ∠BAC/2 सिद्ध हुआ

प्रश्न 11 : A, B, D, E एक ही वृत्त पर हैं, सिद्ध करो

bindaeducation.org

प्रश्न : बिंदु A से भुजा BC पर खींचा गया लंब BC को बिंदु D पर काटता है, और भुजा CA पर खींचा गया लंब CA को बिंदु E पर काटता है, तो सिद्ध करो कि चारों बिंदु A, B, D, E एक ही वृत्त पर स्थित हैं।

दिया है : AD, BC पर लंब है, BE, CA पर लंब है।

सिद्ध करना है : A, B, D, E एक ही वृत्त पर स्थित हैं।

D, E को जोड़ो।

AD, BC पर लंब है, इसलिए ∠ADB = ∠ADC = 90° है।

BE, CA पर लंब है, इसलिए ∠AEB = ∠BEC = 90° है।

∠ADB = ∠AEB = 90° है, यानी AB को व्यास बनाकर खींचा गया वृत्त D और E दोनों से होकर जाता है।

इसलिए चारों बिंदु A, B, D, E एक ही वृत्त पर स्थित हैं।

∴ A, B, D, E एक ही वृत्त पर स्थित हैं, सिद्ध हुआ

> दूसरा तरीका : चतुर्भुज ABDE में ∠ADB + ∠AEB = 180° है, इसलिए उसके सम्मुख कोण संपूरक हैं, और वह चक्रीय चतुर्भुज है।

कषे देखी 7.2 : अति संक्षिप्त उत्तर वाले प्रश्न

प्रश्न 12 (A) : बहुविकल्पीय प्रश्न

प्रश्न : सही उत्तर चुनो :

(i) चित्र में O वृत्त का केंद्र है, यदि ∠ACB = 30°, ∠ABC = 60°, ∠DAB = 35° और ∠DBC = x° हो, तो x का मान है : (a) 35 (b) 65 (c) 70 (d) 55

(ii) चित्र में O वृत्त का केंद्र है, यदि ∠BAD = 65°, ∠BDC = 45° हो, तो ∠CBD का मान है : (a) 65° (b) 40° (c) 45° (d) 20°

(iii) चित्र में O वृत्त का केंद्र है, यदि ∠AEB = 110° और ∠CBE = 30° हो, तो ∠ADB का मान है : (a) 70° (b) 60° (c) 80° (d) 90°

(iv) चित्र में O वृत्त का केंद्र है, यदि ∠BCD = 28°, ∠AEC = 38° हो, तो ∠AXB का मान है : (a) 56° (b) 86° (c) 38° (d) 28°

(v) चित्र में O वृत्त का केंद्र है और AB व्यास है। यदि AB, CD के समांतर हो, ∠ABC = 25° हो, तो ∠CED का मान है : (a) 80° (b) 25° (c) 50° (d) 40°

(i) त्रिभुज ABC में ∠BAC = 180° - 30° - 60° = 90° है।

∠DAC और ∠DBC एक ही चाप DC से बने कोण हैं, इसलिए ∠DAC = ∠DBC = x°।

∠BAC = ∠BAD + ∠DAC = 35° + x° = 90°, इसलिए x = 55। उत्तर : (d) 55।

(ii) ∠BAC और ∠BDC एक ही चाप BC से बने कोण हैं, इसलिए ∠BAC = ∠BDC = 45°।

∠CAD = ∠BAD - ∠BAC = 65° - 45° = 20°।

∠CAD और ∠CBD एक ही चाप CD से बने कोण हैं, इसलिए ∠CBD = ∠CAD = 20°। उत्तर : (d) 20°।

(iii) ∠BEC = 180° - ∠AEB = 180° - 110° = 70° है।

त्रिभुज BEC में ∠BCE = 180° - 70° - 30° = 80° है।

∠ACB और ∠ADB एक ही चाप AB से बने कोण हैं, इसलिए ∠ADB = ∠ACB = 80°। उत्तर : (c) 80°।

(iv) ∠BAD और ∠BCD एक ही चाप BD से बने कोण हैं, इसलिए ∠BAD = ∠BCD = 28°।

त्रिभुज में ∠CBE = 180° - (38° + 28°) = 114° है।

∠ABX = 180° - 114° = 66° है।

∠AXB = 180° - (66° + 28°) = 86°। उत्तर : (b) 86°।

(v) AB, CD के समांतर है, इसलिए ∠ABC = ∠BCD = 25° (एकांतर कोण)।

∠CED = 90° - 25° - 25° = 40°। उत्तर : (d) 40°।

∴ (i) (d) 55, (ii) (d) 20°, (iii) (c) 80°, (iv) (b) 86°, (v) (d) 40°

birlaeducation.org

प्रश्न 12 (B) : सत्य या मिथ्या लिखो

प्रश्न : नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या मिथ्या, लिखो :

(i) चित्र में AD और BE, त्रिभुज ABC की भुजाओं BC और CA पर लंब हैं, तो A, B, D, E एक ही वृत्त पर स्थित हैं।

(ii) त्रिभुज ABC में AB = AC है, BE और CF, कोण ABC और कोण ACB के समद्विभाजक हैं, जो AC और AB को क्रमशः बिंदु E और F पर काटते हैं, तो चारों बिंदु B, C, E, F एक ही वृत्त पर स्थित हैं।

(i) ∠ADB = ∠AEB = 90° है, इसलिए AB को व्यास बनाकर खींचा गया वृत्त D और E दोनों से होकर जाता है।
कथन **सत्य** है।

(ii) AB = AC है, इसलिए ∠ABC = ∠ACB है।

त्रिभुज BEC में ∠BEC = 180° - ∠ABC/2 - ∠ACB है, और त्रिभुज BFC में ∠BFC = 180° - ∠ABC - ∠ACB/2 है।

∠ABC = ∠ACB होने से ∠BEC = ∠BFC है, यानी जीवा BC से E और F पर बने कोण बराबर हैं।

इसलिए चारों बिंदु B, C, E, F एक ही वृत्त पर स्थित हैं।

कथन **सत्य** है।

∴ (i) सत्य, (ii) सत्य

birlaeducation.org

प्रश्न 12 (C) : खाली जगह भरो

प्रश्न : खाली जगह भरो :

(i) एक ही वृत्तखंड के सभी कोण _____ होते हैं।

(ii) यदि एक ही ओर स्थित दो बिंदुओं को जोड़ने वाला रेखाखंड बराबर कोण बनाता है, तो चारों बिंदु _____ होते हैं।

(iii) यदि दो चापों से वृत्त पर बने दो कोण बराबर हों, तो उन चापों की लंबाई _____ होती है।

(i) एक ही वृत्तखंड के सभी कोण बराबर होते हैं।

(ii) चारों बिंदु एक ही वृत्त पर स्थित (चक्रीय) होते हैं।

(iii) उन चापों की लंबाई बराबर होती है।

∴ (i) बराबर, (ii) चक्रीय, (iii) बराबर

प्रश्न 13 : संक्षिप्त उत्तर वाले प्रश्न

प्रश्न :

(i) चित्र में O वृत्त का केंद्र है, AC व्यास है, और जीवा DE, व्यास AC के समांतर है। यदि ∠CBD = 60° हो, तो ∠CDE का मान निकालो।

(ii) चित्र में QS, कोण PQR का समद्विभाजक है, यदि ∠SQR = 35° और ∠PRQ = 32° हो, तो ∠QSR का मान निकालो।

(iii) चित्र में O वृत्त का केंद्र है और AB व्यास है। यदि AB और CD एक दूसरे पर लंब हों, और ∠ADC = 50° हो, तो ∠CAD का मान निकालो।

(iv) चित्र में O वृत्त का केंद्र है और AB = AC है, यदि ∠ABC = 32° हो, तो ∠BDC का मान निकालो।

(i) ∠CAD और ∠CBD एक ही चाप CD से बने कोण हैं, इसलिए ∠CAD = ∠CBD = 60°।

AC व्यास है, इसलिए ∠ADC = 90° (अर्धवृत्त का कोण) है।

त्रिभुज ADC में ∠DCA = 180° - 90° - 60° = 30° है।

DE, AC के समांतर है, इसलिए ∠CDE = ∠DCA = 30° (एकांतर कोण)।

(ii) QS, ∠PQR का समद्विभाजक है, इसलिए ∠PQS = ∠SQR = 35° है।

∠SRP और ∠SQR एक ही चाप SR से बने कोण हैं, इसलिए ∠SRP = 35° है।

त्रिभुज PQR में ∠QPR = 180° - (35° + 35° + 32°) = 78° है।

∠QSR और ∠QPR एक ही चाप QR से बने कोण हैं, इसलिए ∠QSR = ∠QPR = 78°।

birlaeducation.org

(iii) ∠ACB = 90° है, क्योंकि AB व्यास है।

∠ABC और ∠ADC एक ही चाप AC से बने कोण हैं, इसलिए ∠ABC = ∠ADC = 50°।

त्रिभुज ABC में ∠BAC = 180° - 90° - 50° = 40° है।

AB, जीवा CD पर लंब है, इसलिए AB चाप CD को दो बराबर भागों में बाँटता है, इसलिए ∠CAD = 2 x ∠BAC = 80°।

(iv) AB = AC है, इसलिए ∠ABC = ∠ACB = 32° है।

∠BAC = 180° - (32° + 32°) = 116° है।

ABCD चक्रीय चतुर्भुज है, इसलिए ∠BDC = 180° - ∠BAC = 180° - 116° = 64°।

∴ (i) ∠CDE = 30°, (ii) ∠QSR = 78°, (iii) ∠CAD = 80°, (iv) ∠BDC = 64°

कषे देखी 7.3

प्रश्न 1 : सही जानकारी चुनो

प्रश्न : त्रिभुज ABC में ∠B समकोण है। AC को व्यास बनाकर खींचा गया वृत्त AB को बिंदु P पर काटता है, तो सही जानकारी चुनो : (i) AB > AD (ii) AB = AD (iii) AB < AD।

दिया है : त्रिभुज ABC में ∠B = 90° है, AC को व्यास बनाकर खींचा गया वृत्त AB को D पर काटता है।

अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है, इसलिए ∠ADC = 90° है।

∠ABC = 90° भी है।

दोनों कोण 90° के हैं, इसलिए बिंदु B और बिंदु D एक ही बिंदु हैं।

इसलिए AB = AD है।

∴ (ii) AB = AD सही है

प्रश्न 2 : व्यास वाला वृत्त असमान भुजा को समद्विभाजित करता है

birlaeducation.org

प्रश्न : सिद्ध करो कि समद्विबाहु त्रिभुज की किसी एक बराबर भुजा को व्यास बनाकर खींचा गया वृत्त असमान भुजा को समद्विभाजित करता है।

दिया है : त्रिभुज ABC में AB = AC है, AB को व्यास बनाकर खींचा गया वृत्त BC को D पर काटता है।

सिद्ध करना है : D, BC को समद्विभाजित करता है।

A, D को जोड़ो।

AB व्यास है, इसलिए ∠ADB समकोण है, यानी AD, BC पर लंब है।

समकोण त्रिभुज ABD और त्रिभुज ACD में कर्ण AB = कर्ण AC है, और AD उभयनिष्ठ है।

इसलिए दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं, इसलिए BD = CD।

इसलिए D, असमान भुजा BC को समद्विभाजित करता है।

∴ D, BC का मध्य बिंदु है, सिद्ध हुआ

प्रश्न 3 : A, Q, B एक ही रेखा पर हैं, सिद्ध करो

प्रश्न : साहाना ने दो वृत्त बनाए जो एक दूसरे को बिंदु P और Q पर काटते हैं। यदि दोनों वृत्तों के व्यास क्रमशः PA और PB हों, तो सिद्ध करो कि A, Q, B एक ही रेखा पर स्थित हैं।

दिया है : दो वृत्त P और Q पर काटते हैं, PA और PB उनके व्यास हैं।

सिद्ध करना है : A, Q, B एक ही रेखा पर स्थित हैं।

Q, A; Q, B और P, Q को जोड़ो।

AP व्यास है, इसलिए अर्धवृत्त का कोण ∠AQP = 90° है।

इसी तरह BP व्यास है, इसलिए ∠BQP = 90° है।

इसलिए ∠AQP + ∠BQP = 180° है।

AQ और BQ बिंदु Q पर मिलते हैं, और आसन्न कोणों का योग 180° है, इसलिए AQ और BQ एक ही सरल रेखा पर हैं।

इसलिए A, Q, B एक ही रेखा पर स्थित हैं।

∴ A, Q, B एक ही रेखा पर स्थित हैं, सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

प्रश्न 4 : PS = ST सिद्ध करो

प्रश्न : रजत ने रेखाखंड PQ बनाया, जिसका मध्य बिंदु R है, और PR और PQ को व्यास बनाकर दो वृत्त बनाए। बिंदु P से होकर एक सरल रेखा खींची गई है, जो पहले वृत्त को बिंदु S पर और दूसरे वृत्त को बिंदु T पर काटती है, तो सिद्ध करो कि PS = ST है।

दिया है : R, PQ का मध्य बिंदु है, PR और PQ व्यास हैं, रेखा PST दोनों वृत्तों को S और T पर काटती है।

सिद्ध करना है : PS = ST।

R, S और Q, T को जोड़ो।

PR पहले वृत्त का व्यास है, इसलिए अर्धवृत्त का कोण ∠PSR = 90° है, यानी SR, PT पर लंब है।

इसी तरह ∠PTQ = 90° है, यानी QT, PT पर लंब है।

SR और QT दोनों PT पर लंब हैं, इसलिए SR, QT के समांतर है।

त्रिभुज PQT में R, PQ का मध्य बिंदु है, और SR, QT के समांतर है।

इसलिए S, PT का मध्य बिंदु है, इसलिए PS = ST।

∴ PS = ST सिद्ध हुआ

प्रश्न 5 : RQ = ST सिद्ध करो

प्रश्न : तीन बिंदु P, Q, R एक वृत्त पर स्थित हैं। बिंदु P से जीवाओं PQ और PR पर खींचे गए लंब वृत्त को क्रमशः बिंदु S और T पर काटते हैं, तो सिद्ध करो कि RQ = ST है।

दिया है : P, Q, R वृत्त पर हैं, PS, PQ पर लंब है, PT, PR पर लंब है।

सिद्ध करना है : RQ = ST।

R, Q; S, T; S, Q और T, R को जोड़ो।

∠SPQ = 90° है, क्योंकि PS, PQ पर लंब है, इसलिए SQ व्यास है।

∠RPT = 90° है, क्योंकि PT, PR पर लंब है, इसलिए RT व्यास है।

व्यास SQ और RT एक दूसरे को O पर काटते हैं, इसलिए O वृत्त का केंद्र है।

इसलिए OR = OQ = OS = OT है।

त्रिभुज ORQ और त्रिभुज OST में OR = OS, OQ = OT, और ∠ROQ = ∠SOT (शीर्षाभिमुख कोण) है।

इसलिए दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं, इसलिए RQ = ST।

∴ RQ = ST सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

प्रश्न 6 : BPQC समांतर चतुर्भुज है, सिद्ध करो

प्रश्न : ABC एक न्यूनकोण त्रिभुज है। AP, त्रिभुज ABC के परिवृत्त का व्यास है। BE और CF क्रमशः AC और AB पर लंब हैं, और वे एक दूसरे को बिंदु Q पर काटते हैं, तो सिद्ध करो कि BPQC एक समांतर चतुर्भुज है।

दिया है : ABC न्यूनकोण त्रिभुज है, AP परिवृत्त का व्यास है, BE, AC पर लंब है, CF, AB पर लंब है, BE और CF बिंदु Q पर काटते हैं।

सिद्ध करना है : BPQC समांतर चतुर्भुज है।

CF, AB पर लंब है, और ∠ABP अर्धवृत्त का कोण है, इसलिए BP, AB पर लंब है।

इसलिए CF, BP के समांतर है, यानी CQ, BP के समांतर है।

BE, AC पर लंब है, और ∠ACP अर्धवृत्त का कोण है, इसलिए CP, AC पर लंब है।

इसलिए CP, BE के समांतर है, यानी CP, BQ के समांतर है।

चतुर्भुज BPQC की सम्मुख भुजाएँ समांतर हैं।

∴ BPQC समांतर चतुर्भुज है, सिद्ध हुआ

प्रश्न 7 : PQ वृत्त का व्यास है, सिद्ध करो

प्रश्न : किसी त्रिभुज के शीर्ष कोण के अंत: और बाह्य समद्विभाजक त्रिभुज के परिवृत्त को क्रमश: बिंदु P और Q पर काटते हैं, तो सिद्ध करो कि PQ वृत्त का व्यास है।

दिया है : त्रिभुज ABC में ∠A के अंत: और बाह्य समद्विभाजक परिवृत्त को P और Q पर काटते हैं।

सिद्ध करना है : PQ वृत्त का व्यास है।

AP और AQ, ∠A के अंत: और बाह्य समद्विभाजक हैं।

अंत: और बाह्य समद्विभाजक एक दूसरे पर लंब होते हैं, इसलिए ∠PAQ = 90° है।

∠PAQ अर्धवृत्त का कोण है, इसलिए PQ वृत्त का व्यास है।

∴ PQ वृत्त का व्यास है, सिद्ध हुआ

प्रश्न 8 : ABCD आयत है, सिद्ध करो

प्रश्न : AB और CD एक वृत्त के दो व्यास हैं, तो सिद्ध करो कि ABCD एक आयताकार आकृति है।

birlaeducation.org

दिया है : AB और CD एक ही वृत्त के दो व्यास हैं।

सिद्ध करना है : ABCD आयत है।

AC, BD, AD और BC को जोड़ो।

∠ADB = ∠ACB = 90° है, क्योंकि ये अर्धवृत्त के कोण हैं।

∠CAD = ∠DBC = 90° है, क्योंकि ये भी अर्धवृत्त के कोण हैं।

इसलिए चतुर्भुज ACBD में ∠A = ∠B = ∠C = ∠D = 90° है।

चारों कोण समकोण हैं।

∴ ACBD आयत है, सिद्ध हुआ

प्रश्न 9 : वृत्त एक निश्चित बिंदु से होकर जाते हैं

प्रश्न : सिद्ध करो कि यदि किसी समचतुर्भुज की भुजाओं को व्यास बनाकर वृत्त बनाए जाएँ, तो वे वृत्त एक निश्चित बिंदु से होकर जाते हैं।

दिया है : ABCD एक समचतुर्भुज है, उसकी भुजाओं को व्यास बनाकर वृत्त बनाए गए हैं।

सिद्ध करना है : सभी वृत्त एक निश्चित बिंदु से होकर जाते हैं।

समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को बिंदु O पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

AB को व्यास बनाकर खींचा गया वृत्त : $\angle AOB = 90°$ है, इसलिए O उस वृत्त पर स्थित है, क्योंकि अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।

इसी तरह BC, CD और DA को व्यास बनाकर खींचे गए वृत्त भी बिंदु O से होकर जाते हैं, क्योंकि $\angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 90°$ है।

इसलिए चारों वृत्त निश्चित बिंदु O से होकर जाते हैं।

∴ सभी वृत्त निश्चित बिंदु O से होकर जाते हैं, सिद्ध हुआ

birlaeducation.org

कषे देखी 7.3 : अति संक्षिप्त उत्तर वाले प्रश्न

प्रश्न 10 (A) : बहुविकल्पीय प्रश्न

प्रश्न : सही उत्तर चुनो :

(i) PQ, केंद्र O वाले वृत्त का व्यास है, और PR = RQ है, तो ∠RPQ का मान है : (a) 30° (b) 90° (c) 60° (d) 45°

(ii) QR, वृत्त की एक जीवा है और POR वृत्त का व्यास है। OD, QR पर लंब है। यदि OD = 4 सेमी हो, तो PQ की लंबाई है : (a) 4 सेमी (b) 2 सेमी (c) 8 सेमी (d) इनमें से कोई नहीं

(iii) AOB वृत्त का व्यास है। यदि AC = 3 सेमी, BC = 4 सेमी हो, तो AB की लंबाई है : (a) 3 सेमी (b) 4 सेमी (c) 5 सेमी (d) 8 सेमी

(iv) चित्र में O वृत्त का केंद्र है और AB व्यास है, यदि ∠BCE = 20°, ∠CAE = 25° हो, तो ∠AEC का मान है : (a) 50° (b) 90° (c) 45° (d) 20°

(i) PR = RQ है, इसलिए ∠PRQ = 90° है, क्योंकि यह अर्धवृत्त का कोण है।

∠RPQ = ∠RQP = (180° - 90°) / 2 = 45°। उत्तर : (d) 45°।

(ii) D, जीवा QR का मध्य बिंदु है, क्योंकि केंद्र से जीवा पर खींचा गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।

O, PR का मध्य बिंदु है, इसलिए त्रिभुज PQR में OD, PQ की आधी है।

PQ = 2 x OD = 2 x 4 = 8 सेमी। उत्तर : (c) 8 सेमी।

birlaeducation.org

(iii) ∠ACB = 90° है, क्योंकि AB व्यास है।

पाइथागोरस से $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, इसलिए AB = 5 सेमी। उत्तर : (c) 5 सेमी।

(iv) ∠ACB = 90° है, क्योंकि AB व्यास है।

∠ACE = 90° + 20° = 110° है।

त्रिभुज ACE में ∠AEC = 180° - (110° + 25°) = 45°। उत्तर : (c) 45°।

∴ (i) (d) 45°, (ii) (c) 8 सेमी, (iii) (c) 5 सेमी, (iv) (c) 45°

प्रश्न 10 (B) : सत्य या मिथ्या लिखो

प्रश्न : नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या मिथ्या, लिखो :

(i) अर्धवृत्त से बड़े वृत्तखंड का कोण अधिक कोण होता है।

(ii) O, त्रिभुज ABC की भुजा AB का मध्य बिंदु है, और OA = OB = OC है, यदि AB को व्यास बनाकर वृत्त बनाया जाए, तो वह वृत्त बिंदु C से होकर जाता है।

(i) अर्धवृत्त से बड़े वृत्तखंड (दीर्घ वृत्तखंड) का कोण न्यून कोण होता है, अधिक कोण नहीं। अधिक कोण लघु वृत्तखंड का होता है।

कथन **मिथ्या** है।

(ii) OA = OB = OC है, इसलिए O को केंद्र और AB को व्यास मानकर बनाया गया वृत्त बिंदु C से होकर जाता है, क्योंकि OC त्रिज्या के बराबर है।

कथन **सत्य** है।

∴ (i) मिथ्या, (ii) सत्य

प्रश्न 10 (C) : खाली जगह भरो

birlaeducation.org

प्रश्न : खाली जगह भरो :

(i) अर्धवृत्त का कोण _____ होता है।

(ii) अर्धवृत्त से छोटे वृत्तखंड का कोण _____ कोण होता है।

(iii) समकोण त्रिभुज के कर्ण को व्यास बनाकर खींचा गया वृत्त _____ से होकर जाता है।

(i) अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।

(ii) अर्धवृत्त से छोटे वृत्तखंड का कोण अधिक कोण होता है।

(iii) वह वृत्त समकोण वाले शीर्ष से होकर जाता है।

∴ (i) समकोण, (ii) अधिक, (iii) समकोण वाले शीर्ष

प्रश्न 11 : संक्षिप्त उत्तर वाले प्रश्न

प्रश्न :

(i) समद्विबाहु त्रिभुज ABC में AB = AC है, AB को व्यास बनाकर खींचा गया वृत्त भुजा BC को बिंदु D पर काटता है। यदि BD = 4 सेमी हो, तो CD का मान निकालो।

(ii) एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC एक दूसरे पर लंब हैं। AB = 4 सेमी, AC = 3 सेमी हो, तो वृत्त की त्रिज्या निकालो।

(iii) एक वृत्त की दो जीवाएँ PQ और PR एक दूसरे पर लंब हैं। वृत्त की त्रिज्या r सेमी हो, तो जीवा QR की लंबाई निकालो।

(iv) AOB वृत्त का व्यास है। बिंदु C वृत्त पर स्थित है। यदि ∠OBC = 60° हो, तो ∠OCA का मान निकालो।

(v) चित्र में O वृत्त का केंद्र है और AB व्यास है। जीवा CD की लंबाई वृत्त की त्रिज्या के बराबर है। AC और BD बढ़ाने पर बिंदु P पर मिलते हैं, तो ∠APB का मान निकालो।

(i) AB व्यास है, इसलिए ∠ADB = 90° है, यानी AD, BC पर लंब है।

AB = AC है, इसलिए समद्विबाहु त्रिभुज में लंब AD, BC को समद्विभाजित करता है।

इसलिए CD = BD = 4 सेमी।

(ii) AB और AC एक दूसरे पर लंब हैं, इसलिए ∠BAC = 90° है।

BC, अर्धवृत्त का कर्ण है, इसलिए BC वृत्त का व्यास है।

BC = $\sqrt{(AB^2 + AC^2)}$ = $\sqrt{(16 + 9)}$ = 5 सेमी, इसलिए त्रिज्या = 5/2 = 2.5 सेमी।

(iii) PQ और PR एक दूसरे पर लंब हैं, इसलिए ∠QPR = 90° है।

QR, अर्धवृत्त का कर्ण है, इसलिए QR वृत्त का व्यास है।

इसलिए QR = 2r सेमी।

(iv) OB = OC है, इसलिए ∠OBC = ∠OCB = 60° है।

∠ACB = 90° है, क्योंकि AB व्यास है।

इसलिए ∠OCA = ∠ACB - ∠OCB = 90° - 60° = 30°।

(v) OA = OC = OB = OD = CD है, इसलिए त्रिभुज OCD समबाहु है।

इसलिए ∠COD = 60° है।

दो जीवाओं के बढ़ने पर बाहर बने कोण के लिए ∠APB = (1/2) x (∠AOB - ∠COD) = (1/2) x (180° - 60°) = 60°।

∴ (i) CD = 4 सेमी, (ii) त्रिज्या = 2.5 सेमी, (iii) QR = 2r सेमी, (iv) ∠OCA = 30°, (v) ∠APB = 60°

birlaeducation.org

परीक्षा में ध्यान देने वाली बातें

बच्चों की 4 आम ग़लतियाँ :

1. चाप गलत चुनना : केंद्र का कोण और परिधि का कोण एक ही चाप से लेने हैं, अलग चाप से नहीं।
2. प्रतिवर्ती कोण भूल जाना : जब परिधि का कोण बड़ी चाप से बने, तो केंद्र का कोण 360° में से घटाकर लेना है।
3. समद्विबाहु त्रिभुज भूल जाना : OA = OB = OC होने से बने त्रिभुजों के आधार कोण बराबर होते हैं, यह हर प्रश्न में काम आता है।
4. अर्धवृत्त का कोण भूल जाना : व्यास के सामने परिधि पर बना कोण हमेशा 90° होता है।

आख़िरी जाँच की आदत : हर प्रश्न में पहले देखो कि कौन सा कोण केंद्र पर है और कौन सा परिधि पर, और दोनों किस चाप से बने हैं। चाप एक ही हो तो दुगुना संबंध लगाओ, चाप अलग हो तो पहले चाप बराबर करो।

birlaeducation.org