कक्षा 10 गणित — WBBSE (माध्यमिक)

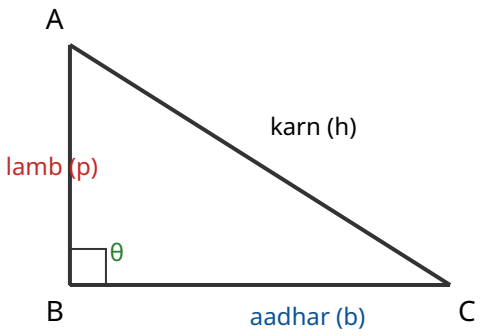
अध्याय 23 : त्रिकोणमितीय अनुपात और त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

संपूर्ण सूत्र-संग्रह + 12 परीक्षा-योग्य हल किए गए उदाहरण (हिंदी में)

इस अध्याय में जो-जो इस्तेमाल होगा, सब कुछ — कोई सूत्र, कोई तरीका छूटा नहीं है।

भाग 1 — सारे सूत्र (कुछ भी skip नहीं)

1. छहों त्रिकोणमितीय अनुपात — समकोण त्रिभुज से



चित्र 1 — समकोण ΔABC (∠B = 90°); कोण θ के सामने वाली भुजा = लंब (p), साथ वाली = आधार (b), सबसे बड़ी = कर्ण (h)

अनुपात	परिभाषा	याद रखने की तरकीब
sin θ	लंब / कर्ण = p/h	"**ल/क, आ/क, ल/आ**" और बाकी तीन इनके **उल्टे**
cos θ	आधार / कर्ण = b/h	
tan θ	लंब / आधार = p/b	
cosec θ	कर्ण / लंब = h/p	
sec θ	कर्ण / आधार = h/b	
cot θ	आधार / लंब = b/p	

> **बच्चे को ऐसे बोलो :** "सिर्फ़ तीन याद करो — **ल/क, आ/क, ल/आ** (sin, cos, tan)। बाकी तीन बस इनके उल्टे हैं। और याद रखो : लंब और आधार कोण के हिसाब से बदलते हैं, कर्ण हमेशा समकोण के सामने वाला।"

2. व्युत्क्रम (उल्टा) संबंध — 3 सूत्र

$$\sin\theta \times \operatorname{cosec}\theta = 1 \quad | \quad \cos\theta \times \sec\theta = 1 \quad | \quad \tan\theta \times \cot\theta = 1$$

मतलब : cosec θ = 1/sin θ, sec θ = 1/cos θ, cot θ = 1/tan θ — एक मालूम हो तो दूसरा तुरंत।

3. भागफल (बाँट) संबंध — 2 सूत्र

$$\tan\theta = \sin\theta / \cos\theta \quad | \quad \cot\theta = \cos\theta / \sin\theta$$

4. तीन पाइथागोरसीय सर्वसमिकाएँ — इस अध्याय की जान

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$$

पहली कहाँ से आई? समकोण त्रिभुज में पाइथागोरस : $p^2 + b^2 = h^2$। दोनों तरफ h^2 से भाग दो : $(p/h)^2 + (b/h)^2 = 1 \Rightarrow$ **$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$**। दूसरी और तीसरी इसी को क्रमशः $\cos^2\theta$ और $\sin^2\theta$ से भाग देकर मिलती हैं।

> **बच्चे को ऐसे बोलो :** "ये तीनों हर कोण के लिए सच हैं — 0° हो या 90°। परीक्षा में 'सिद्ध कीजिए' वाले प्रश्न इन्हीं तीनों के इर्द-गिर्द घूमते हैं।"

5. मानक कोणों के मान — पूरी तालिका (रटने से पहले समझो)

θ	0°	30°	45°	60°	90°
sin θ	0	1/2	1/√2	√3/2	1
cos θ	1	√3/2	1/√2	1/2	0
tan θ	0	1/√3	1	√3	अपरिभाषित
cosec θ	अपरिभाषित	2	√2	2/√3	1
sec θ	1	2/√3	√2	2	अपरिभाषित
cot θ	अपरिभाषित	√3	1	1/√3	0

ये मान आते कहाँ से हैं?



चित्र 2 — बायाँ : 30°-60°-90° त्रिभुज (भुजाएँ 1, √3, 2) | दायाँ : 45°-45°-90° त्रिभुज (भुजाएँ 1, 1, √2)

- **45° वाले :** समद्विबाहु समकोण त्रिभुज लो (भुजाएँ 1, 1) ⇒ कर्ण = √2 ⇒ sin45° = cos45° = 1/√2, tan45° = 1।
- **30°/60° वाले :** समबाहु त्रिभुज (भुजा 2) को बीच से काटो ⇒ 30°-60°-90° त्रिभुज बनता है, भुजाएँ 1, √3, 2। 30° के सामने = 1 ⇒ sin30° = 1/2; 60° के सामने = √3 ⇒ sin60° = √3/2।
- **0°/90° वाले :** कोण को घटाते-घटाते 0° करो ⇒ लंब 0 हो जाता है ⇒ sin0° = 0, cos0° = 1।

> **आम ग़लती :** tan90° और cot0° अपरिभाषित होते हैं (हर में 0 आ जाता है) — इन्हें 0 या 1 लिखना ग़लत है।

6. उन्नयन और अवनमन कोण (ऊँचाई वाले प्रश्नों के लिए)

- **उन्नयन कोण :** आँख से ऊपर वाली चीज़ को देखने पर, क्षैतिज रेखा से ऊपर की ओर बना कोण।
- **अवनमन कोण :** आँख से नीचे वाली चीज़ को देखने पर, क्षैतिज रेखा से नीचे की ओर बना कोण।
- चित्र हमेशा बनाओ : **लंब = ऊँचाई, आधार = दूरी, कर्ण = सीधी नज़र (दृष्टि रेखा)** — फिर tan या sin लगाओ।

7. θ का विलोपन (Elimination) — विधि

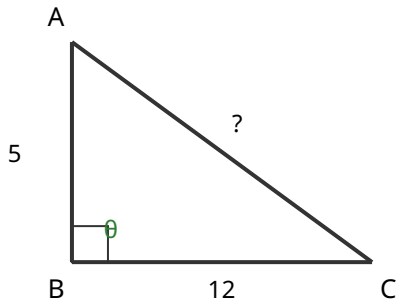
जब दो समीकरणों में sin θ और cos θ (या sec θ, tan θ) हों और θ हटाना हो :

- **चरण 1 :** sin θ और cos θ को अलग-अलग निकालो।
- **चरण 2 :** सर्वसमिका **$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$** में रखो — θ गायब!
- अगर sec θ, tan θ हों तो **$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$** इस्तेमाल करो।

भाग 2 — 12 हल किए गए उदाहरण (परीक्षा-योग्य तरीके से)

उदाहरण 1 — भुजाओं से छहों अनुपात निकालना

प्रश्न : समकोण त्रिभुज ABC में ∠B = 90°, AB = 5 सेमी, BC = 12 सेमी है। ∠A के सभी छह त्रिकोणमितीय अनुपात निकालिए।



चित्र 3 — ∠A के लिए : लंब = BC = 12, आधार = AB = 5

चरण 1 : कर्ण AC = $\sqrt{(5^2 + 12^2)} = \sqrt{(25 + 144)} = \sqrt{169} =$ **13 सेमी**
चरण 2 : ∠A के लिए लंब = 12, आधार = 5, कर्ण = 13।
sin A = 12/13, cos A = 5/13, tan A = 12/5
cosec A = 13/12, sec A = 13/5, cot A = 5/12

अतः छहों अनुपात : sin A = 12/13, cos A = 5/13, tan A = 12/5, cosec A = 13/12, sec A = 13/5, cot A = 5/12

बच्चे को ऐसे बोलो : "5-12-13 वाला त्रिक याद रखो — 3-4-5 की तरह यह भी परीक्षा में बार-बार आता है।"

उदाहरण 2 — एक अनुपात दिया हो, बाकी निकालना + सर्वसमिका जाँचना

प्रश्न : यदि cot A = 4/7.5 हो, तो cos A और cosec A के मान निकालिए और दिखाइए कि $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$।

चरण 1 : cot A = 4/7.5 = 40/75 = 8/15 ⇒ आधार = 8k, लंब = 15k ⇒ कर्ण = $\sqrt{(64 + 225)}k = \sqrt{289}k = 17k$
चरण 2 : cos A = आधार/कर्ण = **8/17**; cosec A = कर्ण/लंब = **17/15**
चरण 3 (जाँच) : $1 + \cot^2 A = 1 + (8/15)^2 = 1 + 64/225 = 289/225 = (17/15)^2 = \operatorname{cosec}^2 A$ ✓ **सिद्ध**

अतः cos A = 8/17, cosec A = 17/15 और $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$ सत्य है।

उदाहरण 3 — मानक मानों से व्यंजक का मान (उत्तर 0)

प्रश्न : मान निकालिए : $\cot^2 30° - 2\cos^2 60° - (3/4)\sec^2 45° - 4\sin^2 30°$

चरण 1 : तालिका से मान रखो :
$\cot^2 30° = (\sqrt{3})^2 = 3$ | $\cos^2 60° = (1/2)^2 = 1/4$ | $\sec^2 45° = (\sqrt{2})^2 = 2$ | $\sin^2 30° = (1/2)^2 = 1/4$
चरण 2 : $= 3 - 2\times(1/4) - (3/4)\times 2 - 4\times(1/4)$

= 3 − 1/2 − 3/2 − 1

चरण 3 : = 3 − (1/2 + 3/2) − 1 = 3 − 2 − 1 = **0**

अतः व्यंजक का मान = 0

बच्चे को ऐसे बोलो : "पहले हर पद का मान अलग-अलग लिखो, फिर जोड़ो-घटाओ। एक साथ गिनने में ही ग़लती होती है।"

उदाहरण 4 — मिश्रित व्यंजक का मान

प्रश्न : मान निकालिए : [(1/3)cos30°] / [(1/2)sin45°] + tan60°/cos30°

चरण 1 (पहला पद) : अंश = (1/3)(√3/2) = √3/6; हर = (1/2)(1/√2) = 1/(2√2)

भाग = (√3/6) ÷ (1/(2√2)) = (√3/6) × 2√2 = 2√6/6 = **√6/3**

चरण 2 (दूसरा पद) : tan60°/cos30° = √3 ÷ (√3/2) = √3 × 2/√3 = **2**

चरण 3 : कुल = 2 + √6/3 = **(6 + √6)/3**

अतः व्यंजक का मान = 2 + √6/3

उदाहरण 5 — सर्वसमिका सिद्ध करना

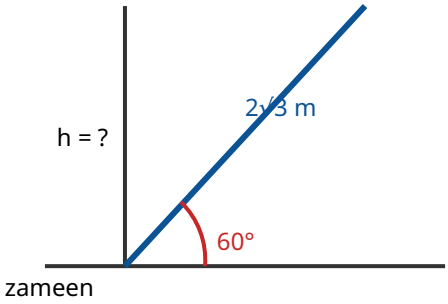
प्रश्न : दिखाइए कि $\sin^2 45° + \cos^2 45° = 1$।

हल : बायाँ पक्ष = $\sin^2 45° + \cos^2 45° = (1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2 = 1/2 + 1/2 = 1$ = दायाँ पक्ष ✓ **सिद्ध**

अतः $\sin^2 45° + \cos^2 45° = 1$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 6 — ऊँचाई वाला प्रश्न (उन्नयन कोण)

प्रश्न : हमारे घर की खिड़की पर एक सीढ़ी ज़मीन से 60° के कोण पर रखी है। सीढ़ी 2√3 मीटर लंबी हो, तो चित्र बनाकर हिसाब कीजिए कि खिड़की ज़मीन से कितनी ऊपर है।



चित्र 4 — सीढ़ी = कर्ण, खिड़की की ऊँचाई = लंब

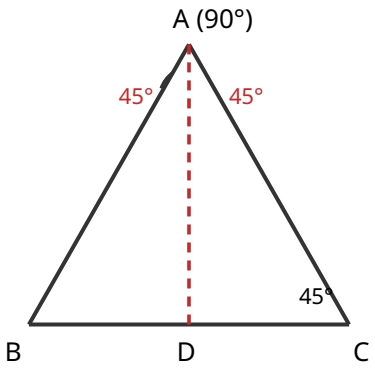
चरण 1 : समकोण त्रिभुज में $\sin 60° = \text{लंब}/\text{कर्ण} = h/(2\sqrt{3})$

चरण 2 : $h = 2\sqrt{3} \times \sin 60° = 2\sqrt{3} \times (\sqrt{3}/2) = (2 \times 3)/2 =$ **3 मीटर**

अतः खिड़की ज़मीन से 3 मीटर ऊपर है।

उदाहरण 7 — त्रिभुज में सर्वसमिका सिद्ध करना

प्रश्न : समद्विबाहु त्रिभुज ABC में AB = AC और ∠BAC = 90° है। ∠BAC का समद्विभाजक BC को D बिंदु पर काटता है। सिद्ध कीजिए कि $\sec(\angle ACD)/\sin(\angle CAD) = \text{cosec}^2(\angle CAD)$।



चित्र 5 — AB = AC, ∠A = 90° ⇒ ∠B = ∠C = 45°; समद्विभाजक AD से ∠CAD = 45°

चरण 1 : AB = AC और ∠BAC = 90° ⇒ $\angle ABC = \angle ACB = (180° - 90°)/2 = 45°$

चरण 2 : AD समद्विभाजक है ⇒ $\angle CAD = 90°/2 =$ **45°**; और $\angle ACD = 45°$

चरण 3 (बायाँ पक्ष) : $\sec(\angle ACD)/\sin(\angle CAD) = \sec 45°/\sin 45° = \sqrt{2} \div (1/\sqrt{2}) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} =$ **2**

चरण 4 (दायाँ पक्ष) : $\text{cosec}^2(\angle CAD) = \text{cosec}^2 45° = (\sqrt{2})^2 =$ **2**

दोनों बराबर ⇒ ✓ **सिद्ध**

अतः $\sec(\angle ACD)/\sin(\angle CAD) = \text{cosec}^2(\angle CAD)$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 8 — भुजाओं से cos का अंतर

प्रश्न : त्रिभुज PQR में ∠Q समकोण है। PR = √5 इकाई और PQ − RQ = 1 इकाई हो, तो cos P − cos R का मान निकालिए।

चरण 1 : माना RQ = x ⇒ PQ = x + 1। पाइथागोरस से : $(x+1)^2 + x^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$

⇒ $x^2 + 2x + 1 + x^2 = 5 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$

x = 1 (ऋणात्मक संभव नहीं) ⇒ **RQ = 1, PQ = 2**

चरण 2 : cos P = PQ/PR = 2/√5 (P के साथ वाली भुजा PQ); cos R = RQ/PR = 1/√5

चरण 3 : cos P − cos R = 2/√5 − 1/√5 = **1/√5**

अतः cos P − cos R = 1/√5

बच्चे को ऐसे बोलो : "cos में हमेशा कोण के साथ वाली भुजा बटे कर्ण लो — P के साथ PQ, R के साथ RQ। यही इस प्रश्न की चाबी है।"

उदाहरण 9 — θ का विलोपन (पहला तरीका)

प्रश्न : यदि sin θ/x = cos θ/y हो, तो दिखाइए कि sin θ − cos θ = (x − y)/√(x² + y²)।

चरण 1 : sin θ/x = cos θ/y = k (माना) ⇒ sin θ = kx, cos θ = ky

चरण 2 : $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ में रखो : $k^2x^2 + k^2y^2 = 1 \Rightarrow k^2(x^2 + y^2) = 1 \Rightarrow$ **$k = 1/\sqrt{(x^2 + y^2)}$**

चरण 3 : sin θ − cos θ = kx − ky = k(x − y) = **$(x - y)/\sqrt{(x^2 + y^2)}$** ✓ सिद्ध

अतः sin θ − cos θ = (x − y)/√(x² + y²) सिद्ध हुआ।

बच्चे को ऐसे बोलो : "विलोपन का मतलब है *θ* को गायब करना — sin θ और cos θ को x, y के रूप में लिखो, फिर $\sin^2+\cos^2=1$ में डालो। θ अपने-आप गायब!"

उदाहरण 10 — θ का विलोपन (सुंदर रूप वाला)

प्रश्न : यदि $(1 + 4x^2)\cos A = 4x$ हो, तो दिखाइए कि cosec A + cot A = (1 + 2x)/(1 − 2x)।

चरण 1 : $\cos A = 4x/(1 + 4x^2)$

चरण 2 : $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - 16x^2/(1 + 4x^2)^2 = [(1 + 4x^2)^2 - 16x^2]/(1 + 4x^2)^2$

$= (1 + 8x^2 + 16x^4 - 16x^2)/(1 + 4x^2)^2 = (1 - 8x^2 + 16x^4)/(1 + 4x^2)^2 = (1 - 4x^2)^2/(1 + 4x^2)^2$

⇒ sin A = **$(1 - 4x^2)/(1 + 4x^2)$**

चरण 3 : cosec A + cot A = 1/sin A + cos A/sin A = (1 + cos A)/sin A

= [1 + 4x/(1 + 4x²)] ÷ [(1 − 4x²)/(1 + 4x²)]

= (1 + 4x² + 4x)/(1 − 4x²) = (1 + 2x)²/[(1 − 2x)(1 + 2x)] = **(1 + 2x)/(1 − 2x)** ✓ सिद्ध

अतः cosec A + cot A = (1 + 2x)/(1 − 2x) सिद्ध हुआ।

उदाहरण 11 — मान रखकर सर्वसमिका जाँचना

प्रश्न : यदि sin α = 5/13 हो, तो दिखाइए कि tan α + sec α = 1.5।

चरण 1 : cos α = √(1 − sin²α) = √(1 − 25/169) = √(144/169) = **12/13**

चरण 2 : tan α + sec α = sin α/cos α + 1/cos α = (5/13)/(12/13) + 1/(12/13)

= 5/12 + 13/12 = 18/12 = 3/2 = **1.5** ✓ सिद्ध

अतः tan α + sec α = 1.5 सिद्ध हुआ।

उदाहरण 12 — θ का विलोपन (परीक्षा का पसंदीदा)

प्रश्न : θ का विलोपन कीजिए : x = 2 sin θ, y = 3 cos θ।

चरण 1 : sin θ = x/2 ⇒ sin²θ = x²/4 ...(1); cos θ = y/3 ⇒ cos²θ = y²/9 ...(2)

चरण 2 : (1) + (2) : sin²θ + cos²θ = x²/4 + y²/9

चरण 3 : बायाँ पक्ष = 1 ⇒ **x²/4 + y²/9 = 1** ✓ (θ विलुप्त!)

अतः θ का विलोपन करने पर x²/4 + y²/9 = 1 मिलता है।

भाग 3 — परीक्षा में ध्यान देने वाली बातें

बच्चों की 5 आम ग़लतियाँ :

1. sin²θ का मतलब (sin θ)² है, sin θ² **नहीं** — कोष्ठक का ध्यान रखो।
2. tan90° और cot0° अपरिभाषित हैं — इन्हें 0 मत लिखो।
3. "सिद्ध कीजिए" में एक ही पक्ष से शुरू करो, दोनों तरफ़ एक साथ मत बदलो।
4. cos θ = आधार/कर्ण — कोण बदलते ही लंब और आधार बदल जाते हैं (उदाहरण 8 देखो)।
5. विलोपन में sin²θ + cos²θ = 1 ही सबसे ज़्यादा काम आती है — इसे सबसे पहले आज़माओ।

आख़िरी जाँच की आदत सिखाओ : उत्तर में tan, sec जैसे अनुपात आएँ तो देखो कि मान 0 और 1 के बीच है या नहीं — sin और cos कभी 1 से बड़े नहीं होते। अगर बड़ा आए, तो गिनती दोबारा देखो।

नोट : यह दस्तावेज़ मूल व्याख्या और मूल हल है — प्रश्नों को अपने शब्दों में हिंदी में लिखा गया है। अभ्यास अपनी पाठ्यपुस्तक ‘गणित प्रकाश’ (WBBSE, कक्षा 10, अध्याय 23) से साथ रखकर करें। प्रश्न-क्रम की जाँच हेतु स्रोत : VidOnko की अध्याय-सूची।