कक्षा 10 गणित — WBBSE (माध्यमिक)

अध्याय 23 : त्रिकोणमितीय अनुपात और त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

कोषे देखि 23.1 — परीक्षा-शैली में पूरा हल (हिंदी में)

हर प्रश्न अपने अलग बॉक्स में है, ठीक वैसे ही जैसे परीक्षा की कॉपी में लिखा जाता है :

प्रश्न → चित्र → दिया है → माना → सूत्र और गणना → ∴ उत्तर

पहले ये बातें याद कर लें

समकोण त्रिभुज में, न्यून कोण θ के लिए :

$\sin\theta$ = लंब/कर्ण $\cos\theta$ = आधार/कर्ण $\tan\theta$ = लंब/आधार

$\cot\theta$ = आधार/लंब $\sec\theta$ = कर्ण/आधार $\operatorname{cosec}\theta$ = कर्ण/लंब

लंब और आधार कैसे पहचानें : जिस कोण का अनुपात निकालना है, **उस कोण के सामने वाली भुजा = लंब** होती है; कोण से लगी हुई (कर्ण को छोड़कर) भुजा = आधार होती है। कोण बदलते ही लंब और आधार आपस में बदल जाते हैं — यही बात प्रश्न 3 में काम आती है।

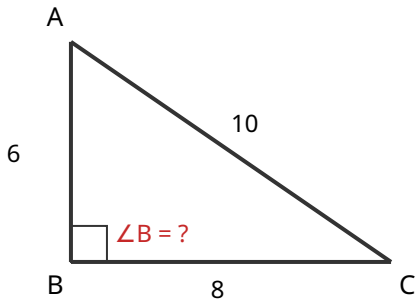
सर्वसमिका	अर्थ
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	sin और cos का वर्ग-योग हमेशा 1
$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	tan से sec बनता है
$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$	cot से cosec बनता है
$\tan\theta = \sin\theta / \cos\theta$	$\cot\theta = \cos\theta / \sin\theta$

कोण	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
30°	1/2	√3/2	1/√3	√3	2/√3	2
45°	1/√2	1/√2	1	1	√2	√2
60°	√3/2	1/2	√3	1/√3	2	2/√3

प्रश्न-दर-प्रश्न हल

प्रश्न 1 — समकोण त्रिभुज : कर्ण 10, आधार 8, लंब 6 सेमी

प्रश्न : मैंने एक समकोण त्रिभुज ABC बनाया है, जिसका कर्ण AB = 10 सेमी, आधार BC = 8 सेमी और लंब AC = 6 सेमी है। ∠ABC के sine और tangent का मान हिसाब करके लिखिए।



चित्र 1 — ∠B के लिए : सामने वाली भुजा AC = 6 लंब, लगी भुजा BC = 8 आधार

दिया है : कर्ण AB = 10 सेमी, आधार BC = 8 सेमी, लंब AC = 6 सेमी।

∠ABC के लिए, कोण B के सामने वाली भुजा AC = 6 सेमी लंब है और लगी हुई भुजा BC = 8 सेमी आधार है।

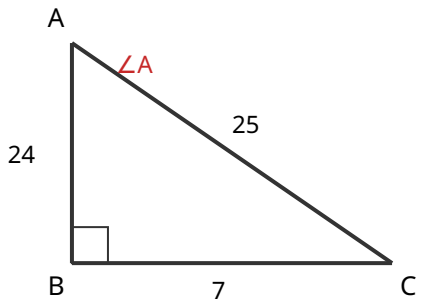
⇒ sin ∠ABC = लंब/कर्ण = 6/10 = 3/5।

⇒ tan ∠ABC = लंब/आधार = 6/8 = 3/4।

∴ sin ∠ABC = 3/5, tan ∠ABC = 3/4

प्रश्न 2 — समकोण त्रिभुज : AB = 24, BC = 7 सेमी

प्रश्न : सोमा ने एक समकोण त्रिभुज ABC बनाया है, जिसका ∠B = 90°, AB = 24 सेमी और BC = 7 सेमी है। हिसाब करके sin A, cos A, tan A और cosec A का मान लिखिए।



चित्र 2 — ∠A के लिए : सामने वाली भुजा BC = 7 लंब, लगी भुजा AB = 24 आधार

दिया है : ∠B = 90°, AB = 24 सेमी, BC = 7 सेमी।

पाइथागोरस से, कर्ण AC = $\sqrt{(AB^2 + BC^2)} = \sqrt{(24^2 + 7^2)} = \sqrt{(576 + 49)} = \sqrt{625} = 25$ सेमी।

∠A के लिए : लंब = BC = 7 सेमी, आधार = AB = 24 सेमी, कर्ण = 25 सेमी।

⇒ sin A = लंब/कर्ण = 7/25।

⇒ cos A = आधार/कर्ण = 24/25।

⇒ tan A = लंब/आधार = 7/24।

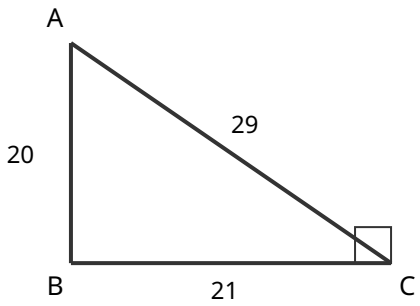
⇒ cosec A = कर्ण/लंब = 25/7।

∴ sin A = 7/25, cos A = 24/25, tan A = 7/24, cosec A = 25/7

> 7-24-25 एक प्रसिद्ध त्रिक है — $7^2 + 24^2 = 25^2$। इसे पहचान लेने से कर्ण सीधे लिख सकते हो।

प्रश्न 3 — समकोण त्रिभुज : ∠C = 90°, BC = 21, AB = 29 इकाई

प्रश्न : समकोण त्रिभुज ABC में ∠C = 90°, BC = 21 इकाई और AB = 29 इकाई हो, तो sin A, cos A, sin B और cos B का मान हिसाब करके लिखिए।



चित्र 3 — ∠C = 90°; कर्ण AB = 29, तीसरी भुजा AC = 20

दिया है : ∠C = 90°, BC = 21 इकाई, कर्ण AB = 29 इकाई।

पाइथागोरस से, $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 29^2 - 21^2 = 841 - 441 = 400 \Rightarrow AC = 20$ इकाई।

∠A के लिए : लंब = BC = 21, आधार = AC = 20 ⇒ sin A = 21/29, cos A = 20/29।

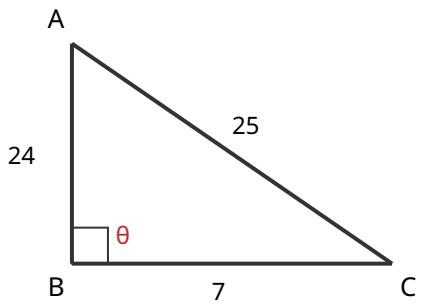
∠B के लिए : लंब और आधार बदल जाते हैं — लंब = AC = 20, आधार = BC = 21 ⇒ sin B = 20/29, cos B = 21/29।

∴ sin A = 21/29, cos A = 20/29, sin B = 20/29, cos B = 21/29

> ध्यान दो : sin A = cos B और cos A = sin B हो गया। ऐसा हमेशा होता है, क्योंकि A + B = 90° है — दोनों पूरक कोण हैं।

प्रश्न 4 — cos θ = 7/25, सभी अनुपात निकालिए

प्रश्न : यदि cos θ = 7/25 हो, तो कोण θ के सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान हिसाब करके लिखिए।



चित्र 4 — cos θ = आधार/कर्ण = 7/25 ⇒ आधार 7, कर्ण 25, लंब 24

दिया है : cos θ = 7/25 = आधार/कर्ण।

माना आधार = 7 इकाई, कर्ण = 25 इकाई।

पाइथागोरस से, लंब^2 = कर्ण^2 − आधार^2 = $25^2 - 7^2$ = 625 − 49 = 576 ⇒ लंब = 24 इकाई।

⇒ sin θ = लंब/कर्ण = 24/25।

⇒ cos θ = आधार/कर्ण = 7/25।

⇒ tan θ = लंब/आधार = 24/7।

⇒ cot θ = आधार/लंब = 7/24।

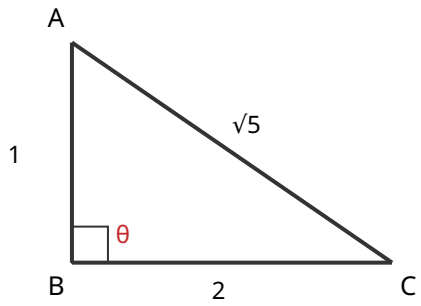
⇒ sec θ = कर्ण/आधार = 25/7।

⇒ cosec θ = कर्ण/लंब = 25/24।

∴ sin θ = 24/25, cos θ = 7/25, tan θ = 24/7, cot θ = 7/24, sec θ = 25/7, cosec θ = 25/24

प्रश्न 5 — cot θ = 2, tan θ और sec θ निकालिए, सर्वसमिका दिखाइए

प्रश्न : यदि cot θ = 2 हो, तो tan θ और sec θ का मान हिसाब करके लिखिए और दिखाइए कि $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ है।



चित्र 5 — cot θ = आधार/लंब = 2/1 ⇒ आधार 2, लंब 1, कर्ण √5

दिया है : cot θ = 2 = 2/1 = आधार/लंब।

माना आधार = 2 इकाई, लंब = 1 इकाई।

पाइथागोरस से, $\text{कर्ण}^2 = \text{आधार}^2 + \text{लंब}^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow$ कर्ण = √5 इकाई।

⇒ tan θ = लंब/आधार = 1/2।

⇒ sec θ = कर्ण/आधार = √5/2।

अब, L.H.S. = $1 + \tan^2\theta = 1 + (1/2)^2 = 1 + 1/4 = 5/4$।

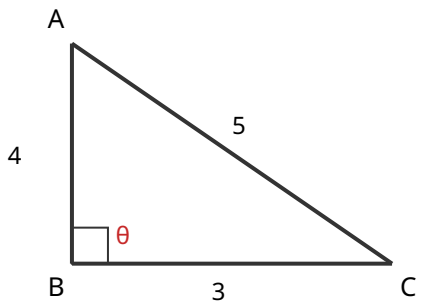
R.H.S. = $\sec^2\theta = (\sqrt{5}/2)^2 = 5/4$।

⇒ L.H.S. = R.H.S.।

∴ tan θ = 1/2, sec θ = √5/2 और $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ सिद्ध हुआ।

प्रश्न 6 — cos θ = 0.6, दिखाइए कि 5 sin θ − 3 tan θ = 0

प्रश्न : यदि cos θ = 0.6 हो, तो दिखाइए कि (5 sin θ − 3 tan θ) = 0 है।



चित्र 6 — cos θ = 0.6 = 3/5 ⇒ आधार 3, कर्ण 5, लंब 4 (3-4-5 त्रिक)

दिया है : cos θ = 0.6 = 6/10 = 3/5 = आधार/कर्ण।

माना आधार = 3 इकाई, कर्ण = 5 इकाई।

पाइथागोरस से, लंब^2 = कर्ण^2 − आधार^2 = $5^2 - 3^2$ = 25 − 9 = 16 ⇒ लंब = 4 इकाई।

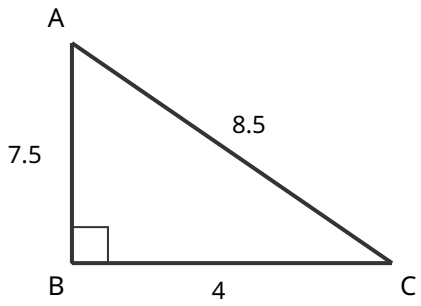
⇒ sin θ = लंब/कर्ण = 4/5, tan θ = लंब/आधार = 4/3।

L.H.S. = 5 sin θ − 3 tan θ = 5 × (4/5) − 3 × (4/3) = 4 − 4 = 0 = R.H.S.।

∴ (5 sin θ − 3 tan θ) = 0 सिद्ध हुआ।

प्रश्न 7 — cot A = 4/7.5, cos A और cosec A निकालिए, सर्वसमिका दिखाइए

प्रश्न : यदि cot A = 4/7.5 हो, तो cos A और cosec A का मान हिसाब करके लिखिए और दिखाइए कि $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$ है।



चित्र 7 — cot A = आधार/लंब = 4/7.5 ⇒ आधार 4, लंब 7.5, कर्ण 8.5

दिया है : cot A = 4/7.5 = आधार/लंब।

माना आधार = 4 इकाई, लंब = 7.5 इकाई।

पाइथागोरस से, कर्ण^2 = आधार^2 + लंब^2 = $4^2 + 7.5^2 = 16 + 56.25 = 72.25$ ⇒ कर्ण = 8.5 इकाई।

⇒ cos A = आधार/कर्ण = 4/8.5 = 8/17।

⇒ cosec A = कर्ण/लंब = 8.5/7.5 = 17/15।

अब, L.H.S. = $1 + \cot^2 A = 1 + (4/7.5)^2 = 1 + 16/56.25 = 72.25/56.25 = 289/225$।

R.H.S. = $\operatorname{cosec}^2 A = (17/15)^2 = 289/225$।

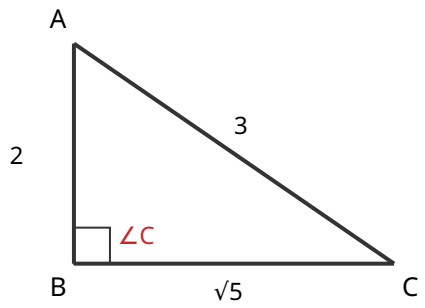
⇒ L.H.S. = R.H.S.।

∴ cos A = 8/17, cosec A = 17/15 और $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$ सिद्ध हुआ।

> दशमलव से घबराओ मत — 7.5 = 15/2 और 8.5 = 17/2 रखकर भिन्न में गिनती आसान हो जाती है : 4/8.5 = 8/17, 8.5/7.5 = 17/15।

प्रश्न 8 — sin C = 2/3, cos C × cosec C का मान निकालिए

प्रश्न : यदि sin C = 2/3 हो, तो हिसाब करके cos C × cosec C का मान लिखिए।



चित्र 8 — sin C = लंब/कर्ण = 2/3 ⇒ लंब 2, कर्ण 3, आधार √5

दिया है : sin C = 2/3 = लंब/कर्ण।

माना लंब = 2 इकाई, कर्ण = 3 इकाई।

पाइथागोरस से, आधार² = कर्ण² − लंब² = $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$ ⇒ आधार = √5 इकाई।

⇒ cos C = आधार/कर्ण = √5/3, cosec C = कर्ण/लंब = 3/2।

⇒ cos C × cosec C = (√5/3) × (3/2) = √5/2।

∴ cos C × cosec C = √5/2

प्रश्न 9 — सत्य / असत्य, कारण सहित लिखिए

प्रश्न : कारण सहित लिखिए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य :

(i) tan A का मान हमेशा 1 से बड़ा होता है।

(ii) cot A का मान हमेशा 1 से छोटा होता है।

(iii) किसी कोण θ के लिए sin θ = 4/3 हो सकता है।

(iv) किसी कोण α के लिए sec α = 12/5 हो सकता है।

(v) किसी कोण β के लिए cosec β = 5/13 हो सकता है।

(vi) किसी कोण θ के लिए cos θ = 3/5 हो सकता है।

(i) असत्य। tan A = लंब/आधार है। यदि लंब आधार से बड़ा हो, तो tan A 1 से बड़ा होगा; पर यदि आधार लंब से बड़ा हो, तो tan A 1 से छोटा होगा। इसलिए यह हमेशा 1 से बड़ा नहीं होता।

(ii) असत्य। cot A = आधार/लंब है। यदि आधार लंब से बड़ा हो, तो cot A 1 से बड़ा होगा। इसलिए यह हमेशा 1 से छोटा नहीं होता।

(iii) असत्य। sin θ = लंब/कर्ण है, और समकोण त्रिभुज में लंब कभी कर्ण से बड़ा नहीं हो सकता। इसलिए sin θ कभी 1 से बड़ा नहीं हो सकता, और 4/3 होना असंभव है।

(iv) सत्य। sec α = कर्ण/आधार है, और कर्ण हमेशा आधार से बड़ा होता है, इसलिए sec α हमेशा 1 से बड़ा होता है। 12/5 = 2.4, जो 1 से बड़ा है, इसलिए संभव है।

(v) असत्य। cosec β = कर्ण/लंब है, और कर्ण हमेशा लंब से बड़ा होता है, इसलिए cosec β हमेशा 1 से बड़ा होता है। पर 5/13, 1 से छोटा है, इसलिए असंभव है।

(vi) सत्य। cos θ = आधार/कर्ण है, और आधार हमेशा कर्ण से छोटा होता है, इसलिए cos θ हमेशा 1 से छोटा होता है। 3/5, 1 से छोटा है, इसलिए संभव है।

∴ (i) असत्य, (ii) असत्य, (iii) असत्य, (iv) सत्य, (v) असत्य, (vi) सत्य

एक लाइन में याद रखो : **sin और cos कभी 1 से बड़े नहीं; sec और cosec कभी 1 से छोटे नहीं; tan और cot कुछ भी हो सकते हैं।** इसी से सारे सत्य-असत्य बन जाते हैं।

प्रश्न 10 — मानक कोणों के मान समझिए

प्रश्न : समझकर लिखिए : cosec 45° = 1/sin 45° = √2 = sec 45° = 1/cos 45° = √2 और cot 45° = 1/tan 45° = 1; साथ ही cosec 30° = 2, sec 30° = 2/√3 और cot 30° = 1/tan 30° = √3।

मानक मान : sin 45° = 1/√2, cos 45° = 1/√2, tan 45° = 1।

⇒ cosec 45° = 1/sin 45° = 1/(1/√2) = √2।

⇒ sec 45° = 1/cos 45° = 1/(1/√2) = √2।

⇒ cot 45° = 1/tan 45° = 1/1 = 1।

मानक मान : sin 30° = 1/2, cos 30° = √3/2, tan 30° = 1/√3।

⇒ cosec 30° = 1/sin 30° = 1/(1/2) = 2।

⇒ sec 30° = 1/cos 30° = 1/(√3/2) = 2/√3।

⇒ cot 30° = 1/tan 30° = 1/(1/√3) = √3।

∴ cosec 45° = sec 45° = √2, cot 45° = 1; cosec 30° = 2, sec 30° = 2/√3, cot 30° = √3

परीक्षा में ध्यान देने वाली बातें

बच्चों की 4 आम ग़लतियाँ :

1. कोण बदलते ही लंब और आधार नहीं बदलना — जिस कोण का अनुपात निकालना है, लंब उसी के सामने वाली भुजा है।
2. कर्ण को लंब या आधार समझ लेना — कर्ण हमेशा समकोण के सामने वाली, सबसे बड़ी भुजा है।
3. सर्वसमिका में वर्ग भूल जाना — $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ है, $1 + \tan\theta = \sec\theta$ नहीं।
4. sin/cos का मान 1 से बड़ा लिख देना — ऐसा कभी संभव नहीं है; उत्तर आते ही जाँच लो।

आख़िरी जाँच की आदत : हर अनुपात का मान निकालने के बाद देखो — sin और cos 1 से बड़े तो नहीं, sec और cosec 1 से छोटे तो नहीं। अगर ऐसा दिखे, तो गिनती में कहीं ग़लती है।

नोट : यह दस्तावेज़ मूल व्याख्या और मूल हल है — प्रश्नों को अपने शब्दों में हिंदी में लिखा गया है। अभ्यास अपनी पाठ्यपुस्तक 'गणित प्रकाश' (WBBSE, कक्षा 10, अध्याय 23, कोषे देखि 23.1) से साथ रखकर करें।