WBBSE (माध्यमिक)

कक्षा 10 गणित

अध्याय 21

माध्यसमानुपाती का निर्धारण

birlaeducation.org

Full Solution : पूरा हल

कषे देखी 21 + स्वयं करो

परीक्षा की कॉपी में लिखने जैसा हल, हिंदी में

बिरला एजुकेशन

कक्षा 10 गणित : अध्याय 21

माध्यसमानुपाती का निर्धारण

कषे देखी 21 और स्वयं करो : पूरा हल

प्रश्न → चित्र → दिया है → सूत्र और गणना → ∴ उत्तर

पहले ये बातें याद कर लें

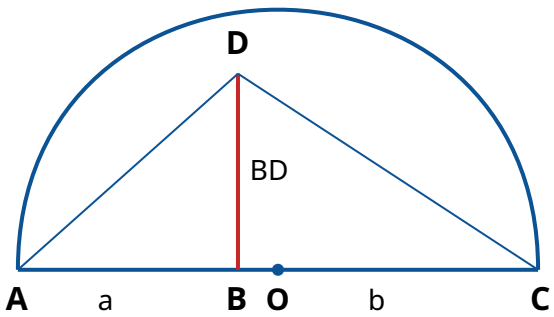
माध्यसमानुपाती किसे कहते हैं : यदि तीन सजातीय राशियाँ a, b, c इस तरह हों कि a/b = b/c हो, यानी $b^2 = ac$ हो, तो b, a और c का **माध्यसमानुपाती** कहलाता है। b = √ac होता है। जैसे 4 और 9 का माध्यसमानुपाती √36 = 6 है, क्योंकि 4/6 = 6/9 है।

माध्यसमानुपाती

a/b = b/c यानी $b^2 = ac$ यानी b = √ac

रचना की मुख्य विधि (अर्धवृत्त वाली) : दो रेखाखंड AB = a और BC = b दिए हों, तो उनका माध्यसमानुपाती बनाने के लिए एक ही सीधी रेखा पर AB और BC को एक के बाद एक काटो, AC को व्यास मानकर अर्धवृत्त बनाओ, फिर B से AC पर लंब डालो जो अर्धवृत्त को D पर काटे। BD ही माध्यसमानुपाती है, क्योंकि $BD^2 = AB \times BC$ होता है।

birlaeducation.org



चित्र 1 : AB = a, BC = b, AC व्यास है, BD ⊥ AC, BD माध्यसमानुपाती है

उपपत्ति : A, D और C, D जोड़ो।

⇒ ∠ADB = 90°, क्योंकि अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।

⇒ त्रिभुज ABD और त्रिभुज CBD समकोणीय हैं, इसलिए AB/BD = BD/BC।

⇒ $BD^2 = AB \times BC = a \times b$।

⇒ BD = √ab, इसलिए BD ही a और b का माध्यसमानुपाती है।

वर्गमूल निकालने की तरकीब : किसी संख्या n का वर्गमूल ज्यामितीय विधि से निकालने के लिए n को दो गुणनखंडों में तोड़ो, जैसे 21 = 7 × 3, 23 = 5 × 4.6, 29 = 5 × 5.8। फिर उन दो लंबाइयों का माध्यसमानुपाती बनाओ, वही √n होगा। बड़ी अभाज्य संख्या के लिए एक गुणनखंड 5 लेकर दूसरा n/5 लो, जैसे 17 = 5 × 3.4, 19 = 5 × 3.8, 37 = 5 × 7.4।

आयत के बराबर वर्ग बनाने की तरकीब : आयत की लंबाई a और चौड़ाई b हो, तो वर्ग की भुजा a और b का माध्यसमानुपाती होती है, क्योंकि वर्ग का क्षेत्रफल भुजा^{2} = ab = आयत का क्षेत्रफल होता है। पहले आयत की एक भुजा को बढ़ाकर दूसरी भुजा के बराबर काटो, फिर उस बढ़ी हुई लंबाई को व्यास मानकर अर्धवृत्त बनाओ, लंब डालो, वही वर्ग की भुजा होगी।

ध्यान दो : रचना में माप स्केल से नहीं, परकार और पटरी से करनी है। माध्यसमानुपाती की लंबाई सिर्फ जाँच के लिए स्केल से मापते हैं, उत्तर वही मापी हुई लंबाई होती है। अर्धवृत्त का केंद्र AC का मध्यबिंदु O होता है, इसे भूलना सबसे आम गलती है।

स्वयं करो (Do It Yourself)

अध्याय के बीच में दिए गए स्वयं करने वाले प्रश्न : हर एक का पूरा हल नीचे है।

birlaeducation.org

स्वयं करो 1 : √21 और √15 का ज्यामितीय मान

प्रश्न : ज्यामितीय विधि से √21 और √15 का मान निकालो।

दिया है : √21 और √15 निकालने हैं।

⇒ पहले 21 = 7 × 3 लिखो।

⇒ फिर एक रेखा AX पर AB = 7 इकाई और BC = 3 इकाई काटो।

⇒ इसके बाद AC को व्यास मानकर अर्धवृत्त बनाओ।

⇒ फिर B से AC पर लंब डालो, जो अर्धवृत्त को D पर काटे।

⇒ BD, 7 और 3 का माध्यसमानुपाती है, इसलिए BD^2 = 7 × 3 = 21।

⇒ BD = √21। स्केल से मापने पर BD = 4.6 सेमी (लगभग) मिलता है।

⇒ इसी तरह 15 = 3 × 5 लिखो।

⇒ फिर AB = 3 इकाई और BC = 5 इकाई लेकर वही रचना दोहराओ।

⇒ BD^2 = 3 × 5 = 15, इसलिए BD = √15। स्केल से मापने पर BD = 3.9 सेमी (लगभग) मिलता है।

∴ √21 = 4.6 (लगभग) √15 = 3.9 (लगभग)

स्वयं करो 2 : √23 का ज्यामितीय मान

प्रश्न : ज्यामितीय विधि से √23 का मान निकालो।

दिया है : √23 निकालना है।

⇒ पहले 23 = 5 × 4.6 लिखो।

⇒ फिर एक रेखा AX पर AB = 5 सेमी और BC = 4.6 सेमी काटो।

⇒ इसके बाद AC को व्यास मानकर अर्धवृत्त बनाओ।

⇒ फिर B से AC पर लंब डालो, जो अर्धवृत्त को D पर काटे।

⇒ BD, 5 और 4.6 का माध्यसमानुपाती है, इसलिए $BD^2 = 5 \times 4.6 = 23$।

⇒ BD = √23। स्केल से मापने पर BD = 4.8 सेमी (लगभग) मिलता है।

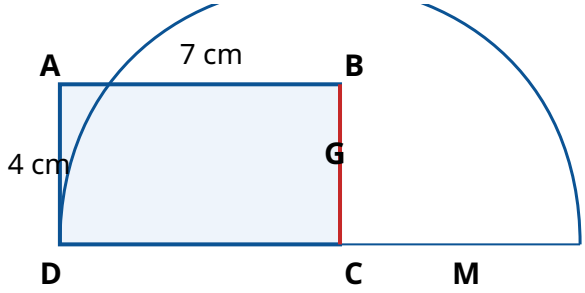
∴ √23 = 4.8 (लगभग)

> दो अंकों वाली अभाज्य संख्या के लिए एक गुणनखंड 5 लो, दूसरा संख्या को 5 से भाग देकर निकालो। जैसे 17 = 5 × 3.4, 19 = 5 × 3.8, 29 = 5 × 5.8, 37 = 5 × 7.4।

birlaeducation.org

स्वयं करो 3 : आयत के बराबर वर्ग बनाओ (7 सेमी × 4 सेमी)

प्रश्न : 7 सेमी लंबा और 4 सेमी चौड़ा आयत बनाकर उसके बराबर क्षेत्रफल वाला वर्ग बनाओ।



चित्र 2 : आयत ABCD, DC बढ़ाकर CM = BC काटा, DM व्यास है, CG वर्ग की भुजा है

दिया है : आयत ABCD की लंबाई AB = 7 सेमी और चौड़ाई BC = 4 सेमी है।

⇒ पहले आयत ABCD बनाओ, AB = 7 सेमी और BC = 4 सेमी।

⇒ फिर DC को M तक बढ़ाओ और CM = BC = 4 सेमी काटो।

⇒ इसके बाद DM को व्यास मानकर अर्धवृत्त बनाओ।

⇒ फिर BC को बढ़ाओ, जो अर्धवृत्त को G पर काटे।

⇒ CG, DC और CM का माध्यसमानुपाती है, इसलिए $CG^2 = DC \times CM = 7 \times 4 = 28$।

⇒ CG = √28 सेमी (लगभग 5.3 सेमी)।

⇒ इसके बाद CG को एक भुजा मानकर वर्ग CEFG बनाओ।

⇒ वर्ग CEFG का क्षेत्रफल = CG^2 = 28 वर्ग सेमी = आयत ABCD का क्षेत्रफल।

∴ CG भुजा वाला वर्ग CEFG ही अभीष्ट वर्ग है, भुजा लगभग 5.3 सेमी

bharateducation.org

कषे देखी 21

प्रश्न 1 : समबाहु त्रिभुज के बराबर वर्ग बनाओ

प्रश्न : 7 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुज के बराबर क्षेत्रफल वाला वर्ग बनाओ।

दिया है : समबाहु त्रिभुज ABC की हर भुजा 7 सेमी है।

⇒ पहले समबाहु त्रिभुज ABC बनाओ, AB = BC = CA = 7 सेमी।

⇒ फिर BC के मध्यबिंदु D पर लंब AD डालो। AD त्रिभुज की ऊँचाई है।

⇒ इसके बाद A से BC के समांतर रेखा खींचो और D से BC पर लंब खींचो, जिससे आयत ADCE बने, जिसका क्षेत्रफल त्रिभुज ABC के बराबर है।

⇒ त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × BC × AD = DC × AD = आयत ADCE का क्षेत्रफल।

⇒ फिर AE को बढ़ाकर AM = CE काटो।

⇒ इसके बाद AM को व्यास मानकर अर्धवृत्त बनाओ।

⇒ फिर CE को बढ़ाओ, जो अर्धवृत्त को P पर काटे।

⇒ EP, AE और EM का माध्यसमानुपाती है, इसलिए EP^2 = AE × EM = त्रिभुज का क्षेत्रफल।

⇒ इसके बाद EP को भुजा मानकर वर्ग EPQR बनाओ।

⇒ वर्ग EPQR का क्षेत्रफल = EP^2 = त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल।

⇒ मापने पर AD = 6.1 सेमी (लगभग) और EP = 4.6 सेमी (लगभग) मिलता है।

∴ EP भुजा वाला वर्ग EPQR ही अभीष्ट वर्ग है, भुजा लगभग 4.6 सेमी

birlaeducation.org

प्रश्न 2 : दिए रेखाखंडों का माध्यसमानुपाती बनाओ

प्रश्न : नीचे दिए गए रेखाखंडों की जोड़ी का माध्यसमानुपाती बनाओ और स्केल से मापकर उसका मान लिखो :
(i) 5 सेमी, 2.5 सेमी (ii) 4 सेमी, 3 सेमी (iii) 7.5 सेमी, 4 सेमी
(iv) 10 सेमी, 4 सेमी (v) 9 सेमी, 5 सेमी (vi) 12 सेमी, 3 सेमी

हर जोड़ी के लिए रचना एक जैसी है : रेखा AX पर AB = पहली लंबाई और BC = दूसरी लंबाई काटो, AC को व्यास मानकर अर्धवृत्त बनाओ, B से AC पर लंब डालो जो अर्धवृत्त को D पर काटे। BD ही माध्यसमानुपाती है, $BD^2 = AB \times BC$।

(i) AB = 5 सेमी, BC = 2.5 सेमी। $BD^2 = 5 \times 2.5 = 12.5$।
⇒ BD = √12.5 = 3.5 सेमी (लगभग)।

(ii) AB = 4 सेमी, BC = 3 सेमी। $BD^2 = 4 \times 3 = 12$।
⇒ BD = √12 = 3.5 सेमी (लगभग)।

(iii) AB = 7.5 सेमी, BC = 4 सेमी। $BD^2 = 7.5 \times 4 = 30$।
⇒ BD = √30 = 5.5 सेमी (लगभग)।

(iv) AB = 10 सेमी, BC = 4 सेमी। $BD^2 = 10 \times 4 = 40$।
⇒ BD = √40 = 6.3 सेमी (लगभग)।

(v) AB = 9 सेमी, BC = 5 सेमी। $BD^2 = 9 \times 5 = 45$।
⇒ BD = √45 = 6.7 सेमी (लगभग)।

(vi) AB = 12 सेमी, BC = 3 सेमी। $BD^2 = 12 \times 3 = 36$।
⇒ BD = √36 = 6 सेमी।

∴ (i) 3.5 सेमी (ii) 3.5 सेमी (iii) 5.5 सेमी (iv) 6.3 सेमी (v) 6.7 सेमी (vi) 6 सेमी (सभी लगभग)

birlaeducation.org

प्रश्न 3 : संख्याओं का वर्गमूल ज्यामितीय विधि से निकालो

प्रश्न : ज्यामितीय विधि से नीचे दी गई संख्याओं का वर्गमूल निकालो :
(i) 7 (ii) 8 (iii) 24 (iv) 28 (v) 13 (vi) 29

हर संख्या के लिए उसे दो गुणनखंडों में तोड़ो, उन लंबाइयों का माध्यसमानुपाती बनाओ, वही वर्गमूल होगा।

(i) 7 = 7 × 1। AB = 7 सेमी, BC = 1 सेमी। $BD^2 = 7$।

⇒ BD = √7 = 2.6 (लगभग)।

(ii) 8 = 4 × 2। AB = 4 सेमी, BC = 2 सेमी। $BD^2 = 8$।

⇒ BD = √8 = 2.8 (लगभग)।

(iii) 24 = 4 × 6। AB = 4 सेमी, BC = 6 सेमी। $BD^2 = 24$।

⇒ BD = √24 = 4.9 (लगभग)।

(iv) 28 = 4 × 7। AB = 4 सेमी, BC = 7 सेमी। $BD^2 = 28$।

⇒ BD = √28 = 5.3 (लगभग)।

(v) 13 = 5 × 2.6। AB = 5 सेमी, BC = 2.6 सेमी। $BD^2 = 13$।

⇒ BD = √13 = 3.6 (लगभग)।

(vi) 29 = 5 × 5.8। AB = 5 सेमी, BC = 5.8 सेमी। $BD^2 = 29$।

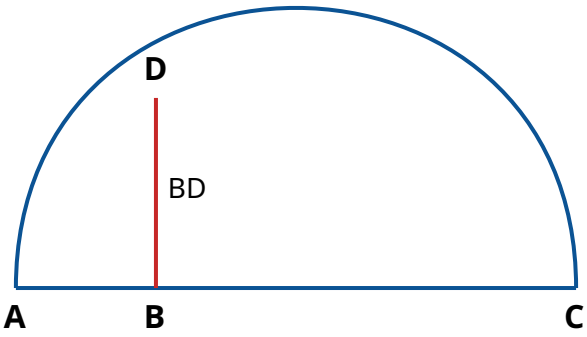
⇒ BD = √29 = 5.4 (लगभग)।

birlaeducation.org

∴ (i) √7 = 2.6 (ii) √8 = 2.8 (iii) √24 = 4.9 (iv) √28 = 5.3 (v) √13 = 3.6 (vi) √29 = 5.4 (सभी लगभग)

प्रश्न 4 : दी गई लंबाई भुजा वाला वर्ग बनाओ

प्रश्न : नीचे दी गई लंबाइयों को भुजा मानकर वर्ग बनाओ :
(i) √14 सेमी (ii) √22 सेमी (iii) √31 सेमी (iv) √33 सेमी



चित्र 3 : पहले BD माध्यसमानुपाती बनाओ, फिर BD को भुजा मानकर वर्ग बनाओ

पहले दी गई लंबाई का माध्यसमानुपाती BD बनाओ, फिर BD को भुजा मानकर वर्ग बनाओ।

(i) √14 : 14 = 2 × 7। AB = 2 सेमी, BC = 7 सेमी। $BD^2 = 14$।

⇒ BD = √14 = 3.7 सेमी (लगभग)। BD को भुजा मानकर वर्ग बनाओ।

(ii) √22 : 22 = 2 × 11। AB = 2 सेमी, BC = 11 सेमी। $BD^2 = 22$।

⇒ BD = √22 = 4.7 सेमी (लगभग)। BD को भुजा मानकर वर्ग बनाओ।

(iii) √31 : 31 = 5 × 6.2। AB = 5 सेमी, BC = 6.2 सेमी। $BD^2 = 31$।

⇒ BD = √31 = 5.6 सेमी (लगभग)। BD को भुजा मानकर वर्ग बनाओ।

(iv) √33 : 33 = 3 × 11। AB = 3 सेमी, BC = 11 सेमी। $BD^2 = 33$।

⇒ BD = √33 = 5.7 सेमी (लगभग)। BD को भुजा मानकर वर्ग बनाओ।

∴ (i) भुजा 3.7 सेमी (ii) भुजा 4.7 सेमी (iii) भुजा 5.6 सेमी (iv) भुजा 5.7 सेमी (सभी लगभग)

birlaeducation.org

प्रश्न 5 : आयत के बराबर वर्ग बनाओ

प्रश्न : नीचे दी गई भुजाओं वाले आयतों के बराबर क्षेत्रफल वाला वर्ग बनाओ :
(i) 8 सेमी, 6 सेमी (ii) 6 सेमी, 4 सेमी (iii) 4.2 सेमी, 3.5 सेमी (iv) 7.9 सेमी, 4.1 सेमी

हर आयत के लिए रचना एक जैसी है : आयत ABCD बनाओ, DC को बढ़ाकर CE = CB काटो, DE को व्यास मानकर अर्धवृत्त बनाओ, CF को बढ़ाओ जो अर्धवृत्त को F पर काटे। CF ही वर्ग की भुजा है, क्योंकि $CF^2 = DC \times CE$ = आयत का क्षेत्रफल।

(i) आयत 8 सेमी × 6 सेमी। $CF^2 = 8 \times 6 = 48$।

⇒ CF = $\sqrt{48}$ = 6.9 सेमी (लगभग)। CF को भुजा मानकर वर्ग बनाओ।

(ii) आयत 6 सेमी × 4 सेमी। $CF^2 = 6 \times 4 = 24$।

⇒ CF = $\sqrt{24}$ = 4.9 सेमी (लगभग)। CF को भुजा मानकर वर्ग बनाओ।

(iii) आयत 4.2 सेमी × 3.5 सेमी। $CF^2 = 4.2 \times 3.5 = 14.7$।

⇒ CF = $\sqrt{14.7}$ = 3.8 सेमी (लगभग)। CF को भुजा मानकर वर्ग बनाओ।

(iv) आयत 7.9 सेमी × 4.1 सेमी। $CF^2 = 7.9 \times 4.1 = 32.39$।

⇒ CF = $\sqrt{32.39}$ = 5.7 सेमी (लगभग)। CF को भुजा मानकर वर्ग बनाओ।

∴ (i) भुजा 6.9 सेमी (ii) भुजा 4.9 सेमी (iii) भुजा 3.8 सेमी (iv) भुजा 5.7 सेमी (सभी लगभग)

birlaeducation.org

प्रश्न 6 : त्रिभुज के बराबर वर्ग बनाओ

प्रश्न : नीचे दिए गए त्रिभुजों के बराबर क्षेत्रफल वाला वर्ग बनाओ :
(i) त्रिभुज की तीनों भुजाएँ 10 सेमी, 7 सेमी और 5 सेमी हैं।
(ii) समद्विबाहु त्रिभुज, जिसका आधार 7 सेमी है और बराबर भुजाओं में से हर एक 5 सेमी है।
(iii) समबाहु त्रिभुज, जिसकी भुजा 6 सेमी है।

हर त्रिभुज के लिए पहले उसके बराबर क्षेत्रफल वाला आयत बनाओ, फिर उस आयत के बराबर वर्ग बनाओ।

(i) त्रिभुज ABC बनाओ, AB = 5 सेमी, BC = 10 सेमी, AC = 7 सेमी।

⇒ फिर BC के मध्यबिंदु D से ऊँचाई डालो और A से BC के समांतर रेखा खींचकर आयत बनाओ, जिसका क्षेत्रफल त्रिभुज के बराबर है।

⇒ फिर उस आयत की एक भुजा को बढ़ाकर दूसरी भुजा के बराबर काटो, अर्धवृत्त बनाओ और लंब डालो।

⇒ लंब ही वर्ग की भुजा है। मापने पर वर्ग की भुजा 4.0 सेमी (लगभग) मिलती है।

(ii) समद्विबाहु त्रिभुज ABC बनाओ, आधार BC = 7 सेमी, AB = AC = 5 सेमी।

⇒ फिर BC के मध्यबिंदु D से ऊँचाई AD डालो। AD = √(25 − 12.25) = √12.75 = 3.6 सेमी (लगभग)।

⇒ फिर A से BC के समांतर रेखा खींचकर आयत बनाओ, जिसकी भुजाएँ DC = 3.5 सेमी और AD = 3.6 सेमी हैं।

⇒ फिर उस आयत के बराबर वर्ग बनाओ। वर्ग की भुजा = √(3.5 × 3.6) = √12.5 = 3.5 सेमी (लगभग)।

(iii) समबाहु त्रिभुज ABC बनाओ, हर भुजा 6 सेमी।

birlaeducation.org

⇒ फिर BC के मध्यबिंदु D से ऊँचाई AD डालो। AD = √(36 − 9) = √27 = 5.2 सेमी (लगभग)।

⇒ फिर A से BC के समांतर रेखा खींचकर आयत बनाओ, जिसकी भुजाएँ DC = 3 सेमी और AD = 5.2 सेमी हैं।

⇒ फिर उस आयत के बराबर वर्ग बनाओ। वर्ग की भुजा = √(3 × 5.2) = √15.6 = 3.9 सेमी (लगभग)।

∴ (i) भुजा 4.0 सेमी (ii) भुजा 3.5 सेमी (iii) भुजा 3.9 सेमी (सभी लगभग)

परीक्षा में ध्यान देने वाली बातें

बच्चों की 4 आम ग़लतियाँ :

1. व्यास गलत लेना : अर्धवृत्त AC को व्यास मानकर बनता है, AB या BC को नहीं। पहले दोनों लंबाइयों को एक ही रेखा पर जोड़ो, फिर मध्यबिंदु निकालो।
2. लंब गलत जगह से डालना : लंब B से डालना है, जहाँ दोनों रेखाखंड मिलते हैं, A या C से नहीं।
3. वर्गमूल के गुणनखंड गलत तोड़ना : जैसे 23 = 5 × 4.6, 29 = 5 × 5.8। गुणनखंडों का गुणनफल वही संख्या होना चाहिए, इसे पहले जाँच लो।
4. मापी हुई लंबाई को ही उत्तर न लिखना : रचना के बाद BD या CF को स्केल से मापकर लिखो, और (लगभग) लिखना मत भूलो, क्योंकि ज्यामितीय माप में थोड़ा अंतर आ सकता है।

आख़िरी जाँच की आदत : हर रचना के बाद जाँचो : क्या $BD^2 = AB \times BC$ है? क्या वर्ग का क्षेत्रफल आयत या त्रिभुज के क्षेत्रफल के बराबर है? गुणा करके जाँच लो, फिर ही उत्तर लिखो।

birlaeducation.org