कक्षा 10 गणित — अध्याय 19

विभिन्न ठोस वस्तुओं से संबंधित वास्तविक समस्याएँ

कोशे देखि 19 — संपूर्ण हल (हिंदी) • WBBSE गणित प्रकाश

हर प्रश्न बिल्कुल exam-copy style में : पूरा प्रश्न → दिया है → बहती हुई working (हर line अलग) → उत्तर। Drawing जहाँ ज़रूरी, वहाँ साथ में।

पहले सूत्र — इस अध्याय की पूरी ताक़त

ठोस	आयतन	वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल	कुल पृष्ठ का क्षेत्रफल
घनाभ	$l \times b \times h$	—	$2(lb + bh + hl)$
घन	a^3	—	$6a^2$
बेलन	$\pi r^2 h$	$2\pi rh$	$2\pi r(r + h)$
शंकु	$(1/3)\pi r^2 h$	πrl	$\pi r(r + l)$; $l = \sqrt{(r^2 + h^2)}$
गोला	$(4/3)\pi r^3$	$4\pi r^2$	$4\pi r^2$
ठोस अर्धगोला	$(2/3)\pi r^3$	$2\pi r^2$	$3\pi r^2$
खोखला गोला	$(4/3)\pi(R^3 - r^3)$	R = बाहरी त्रिज्या, r = भीतरी त्रिज्या	
खोखला बेलन	$\pi(R^2 - r^2)h$	R = बाहरी त्रिज्या, r = भीतरी त्रिज्या	

इस अध्याय के 2 सुनहरे नियम :

नियम 1 (पिघलाना) : एक ठोस को पिघलाकर दूसरा ठोस बनाने पर **आयतन बराबर** रहता है — पुराना आयतन = नया आयतन।

नियम 2 (डुबोना) : कोई वस्तु पानी में पूरी डुबोने पर जितना पानी **ऊपर उठता** है, उसका आयतन = डूबी हुई वस्तु का आयतन।

($\pi = 22/7$ लेंगे।)

पुस्तक के हल किए गए उदाहरण (Application)

उदाहरण 1. एक खोखले लोहे के बेलन की ऊँचाई 25 cm है। उसकी बाहरी व्यास 14 cm और भीतरी व्यास 10 cm है। इस बेलन को पिघलाकर एक ठोस शंकु बनाया गया, जिसकी ऊँचाई बेलन की ऊँचाई की आधी है। शंकु के आधार की व्यास ज्ञात करो।

दिया है : बाहरी त्रिज्या R = 14/2 = 7 cm; भीतरी त्रिज्या r = 10/2 = 5 cm; ऊँचाई = 25 cm

बेलन में लोहे का आयतन = $\pi(R^2 - r^2) \times h$

= $(22/7) \times (7^2 - 5^2) \times 25 = (22/7) \times 24 \times 25 = 600\pi$ घन cm

शंकु की ऊँचाई = 25/2 = 12.5 cm

माना शंकु की आधार-त्रिज्या = R_1 cm

पिघलाने पर आयतन बराबर रहता है,

$\therefore (1/3)\pi R_1^2 \times 12.5 = 600\pi$

$\Rightarrow R_1^2 = (600 \times 3)/12.5 = 144$

$\Rightarrow R_1 = 12$ cm

∴ शंकु के आधार की व्यास = 2 × 12 = 24 cm

उत्तर : शंकु के आधार की व्यास = 24 cm

उदाहरण 2. चाँदी की चादर से बने एक अर्धगोलाकार कटोरे की बाहरी व्यास 8 cm और भीतरी व्यास 4 cm है। कटोरे को पिघलाकर 8 cm व्यास वाला एक ठोस शंकु बनाया गया। शंकु की ऊँचाई ज्ञात करो।

दिया है : बाहरी त्रिज्या R = 8/2 = 4 cm; भीतरी त्रिज्या r = 4/2 = 2 cm; शंकु की त्रिज्या = 8/2 = 4 cm

कटोरे की चाँदी का आयतन = $(2/3)\pi(R^3 - r^3)$

$= (2/3)\pi(4^3 - 2^3) = (2/3)\pi \times 56 = (112/3)\pi$ घन cm

माना शंकु की ऊँचाई = h cm

पिघलाने पर आयतन बराबर रहता है,

$\therefore (1/3)\pi \times 4^2 \times h = (112/3)\pi$

$\Rightarrow 16h = 112$

$\Rightarrow h = 7$ cm

उत्तर : शंकु की ऊँचाई = 7 cm

उदाहरण 3. एक बेलनाकार ड्रम में कुछ पानी है। 2.8 डेसीमी व्यास और 3 डेसीमी ऊँचाई वाला शंकु-आकार का लोहे का टुकड़ा पानी में पूरा डुबोने पर पानी का स्तर 0.64 डेसीमी ऊपर उठ गया। ड्रम के आधार की व्यास ज्ञात करो।

दिया है : शंकु की त्रिज्या = 2.8/2 = 1.4 डेसीमी; ऊँचाई = 3 डेसीमी; पानी की वृद्धि = 0.64 डेसीमी

शंकु का आयतन = $(1/3)\pi \times (1.4)^2 \times 3 = 1.96\pi$ घन डेसीमी

माना ड्रम की आधार-त्रिज्या = R डेसीमी

बढ़े हुए पानी का आयतन = $\pi R^2 \times 0.64$

डुबोने पर बढ़े पानी का आयतन = डूबी वस्तु का आयतन,

$\therefore \pi R^2 \times 0.64 = 1.96\pi$

$\Rightarrow R^2 = 1.96/0.64 = 3.0625$

$\Rightarrow R = 1.75$ डेसीमी

∴ ड्रम के आधार की व्यास = 2 × 1.75 = 3.5 डेसीमी

उत्तर : ड्रम के आधार की व्यास = 3.5 डेसीमी

उदाहरण 4. एक बेलनाकार बर्तन (व्यास 28 cm) में कुछ पानी है। लोहे के 3 ठोस गोले इसमें पूरी तरह डुबोए गए, तो पानी का स्तर पहले से 7 cm ऊपर उठ गया। प्रत्येक गोले की व्यास ज्ञात करो।

दिया है : बर्तन की त्रिज्या = 28/2 = 14 cm; पानी की वृद्धि = 7 cm; गोलों की संख्या = 3

माना प्रत्येक गोले की त्रिज्या = r cm

3 गोलों का कुल आयतन = $3 \times (4/3)\pi r^3 = 4\pi r^3$ घन cm

बढ़े हुए पानी का आयतन = $\pi \times 14^2 \times 7 = 1372\pi$ घन cm

डुबोने पर बढ़े पानी का आयतन = गोलों का आयतन,

$\therefore 4\pi r^3 = 1372\pi$

$\Rightarrow r^3 = 343$

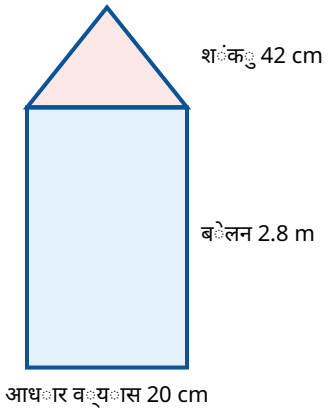
$\Rightarrow r = 7$ cm

∴ प्रत्येक गोले की व्यास = 2 × 7 = 14 cm

उत्तर : प्रत्येक गोले की व्यास = 14 cm

कोशे देखि 19 — मुख्य प्रश्न

प्रश्न 1. अनवर के घर के सामने लोहे का एक ठोस खंभा है। खंभे का निचला भाग बेलन-आकार का और ऊपरी भाग शंकु-आकार का है। दोनों के आधार की व्यास 20 cm है। बेलनाकार भाग की ऊँचाई 2.8 m और शंक्वाकार भाग की ऊँचाई 42 cm है। यदि 1 घन cm लोहे का वज़न 7.2 ग्राम हो, तो खंभे का कुल वज़न ज्ञात करो।



चित्र — खंभा : नीचे बेलन, ऊपर शंकु

दिया है : आधार की त्रिज्या r = 20/2 = 10 cm; बेलन की ऊँचाई = 2.8 m = 280 cm; शंकु की ऊँचाई = 42 cm

बेलनाकार भाग का आयतन = $\pi r^2 h$

$= (22/7) \times 10^2 \times 280 = 88{,}000$ घन cm

शंक्वाकार भाग का आयतन = $(1/3)\pi r^2 h$

= $(1/3) \times (22/7) \times 10^2 \times 42$ = 4,400 घन cm

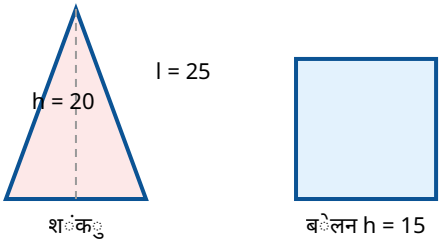
∴ खंभे का कुल आयतन = 88,000 + 4,400 = 92,400 घन cm

1 घन cm लोहे का वज़न = 7.2 ग्राम

∴ खंभे का वज़न = 92,400 × 7.2 ग्राम = 6,65,280 ग्राम = 665.28 किग्रा

उत्तर : खंभे का वज़न = 665.28 किग्रा

प्रश्न 2. एक ठोस शंकु की ऊँचाई 20 cm और तिर्यक ऊँचाई 25 cm है। यदि उतने ही आयतन वाला एक ठोस बेलन बनाया जाए, जिसकी ऊँचाई 15 cm हो, तो बेलन के आधार की व्यास ज्ञात करो।



चित्र — शंकु और उतने ही आयतन का बेलन

दिया है : शंकु की ऊँचाई h = 20 cm, तिर्यक ऊँचाई l = 25 cm; बेलन की ऊँचाई = 15 cm; दोनों के आयतन बराबर हैं

माना शंकु की आधार-त्रिज्या = r cm

हम जानते हैं, $l^2 = r^2 + h^2$

∴ $r^2 = l^2 - h^2 = 25^2 - 20^2 = 625 - 400 = 225$

⇒ r = 15 cm

शंकु का आयतन = $(1/3)\pi r^2 h = (1/3)\pi \times 15^2 \times 20 = 1500\pi$ घन cm

माना बेलन की आधार-त्रिज्या = R cm

बेलन का आयतन = $\pi R^2 \times 15$

प्रश्नानुसार, दोनों के आयतन बराबर हैं,

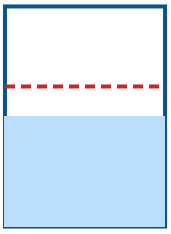
∴ $\pi R^2 \times 15 = 1500\pi$

⇒ $R^2 = 100$ ⇒ R = 10 cm

∴ बेलन के आधार की व्यास = 2 × 10 = 20 cm

उत्तर : बेलन के आधार की व्यास = 20 cm

प्रश्न 3. एक बेलनाकार डिब्बे (व्यास 24 cm) में कुछ पानी है। 6 cm आधार-व्यास और 4 cm ऊँचाई वाले लोहे के 60 ठोस शंकु पानी में पूरी तरह डुबो दिए गए। पानी का स्तर कितना ऊपर उठेगा, ज्ञात करो।



डिब्बा, व्यास 24 cm

चित्र — डुबोने से पानी का स्तर ऊपर उठता है

दिया है : डिब्बे की त्रिज्या = 24/2 = 12 cm; एक शंकु की त्रिज्या = 6/2 = 3 cm, ऊँचाई = 4 cm; शंकुओं की संख्या = 60

एक शंकु का आयतन = $(1/3)\pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$ घन cm

∴ 60 शंकुओं का कुल आयतन = $60 \times 12\pi = 720\pi$ घन cm

माना पानी का स्तर h cm ऊपर उठा

बढ़े हुए पानी का आयतन = $\pi \times 12^2 \times h = 144\pi h$ घन cm

डुबोने पर बढ़े पानी का आयतन = डूबे शंकुओं का आयतन,

∴ $144\pi h = 720\pi$

⇒ $h = 720/144 = 5$ cm

उत्तर : पानी का स्तर 5 cm ऊपर उठेगा

प्रश्न 4. एक ठोस शंकु और एक ठोस बेलन की आधार-त्रिज्या और ऊँचाई समान हैं। यदि उनके वक्र पृष्ठों के क्षेत्रफलों का अनुपात 5 : 8 हो, तो उनकी आधार-त्रिज्या और ऊँचाई का अनुपात ज्ञात करो।

दिया है : माना दोनों की आधार-त्रिज्या = r इकाई और ऊँचाई = h इकाई; वक्र पृष्ठों का अनुपात = 5 : 8

शंकु की तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{(r^2 + h^2)}$

शंकु का वक्र पृष्ठ = $\pi r l = \pi r\sqrt{(r^2 + h^2)}$

बेलन का वक्र पृष्ठ = $2\pi rh$

प्रश्नानुसार,

$\pi r\sqrt{(r^2 + h^2)} / 2\pi rh = 5/8$

⇒ $\sqrt{(r^2 + h^2)}/h = 5/4$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

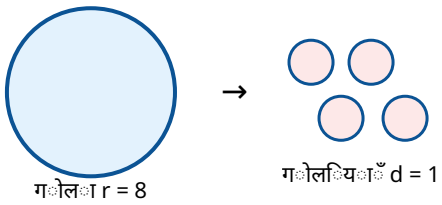
$(r^2 + h^2)/h^2 = 25/16$

⇒ $r^2/h^2 = 25/16 - 1 = 9/16$

⇒ $r/h = 3/4$

उत्तर : त्रिज्या : ऊँचाई = 3 : 4

प्रश्न 5. 8 cm त्रिज्या वाले एक ठोस लोहे के गोले को पिघलाकर 1 cm व्यास वाली कितनी छोटी गोलियाँ (कंचे) बनाई जा सकती हैं? ज्ञात करो।



चित्र — बड़ा गोला पिघलाकर छोटी-छोटी गोलियाँ

दिया है : बड़े गोले की त्रिज्या = 8 cm; एक गोली की त्रिज्या = 1/2 = 0.5 cm

बड़े गोले का आयतन = $(4/3)\pi \times 8^3$ घन cm

एक गोली का आयतन = $(4/3)\pi \times (0.5)^3$ घन cm

माना गोलियों की संख्या = n

पिघलाने पर कुल आयतन बराबर रहता है,

∴ n = बड़े गोले का आयतन / एक गोली का आयतन = $8^3/(0.5)^3$

= $(8/0.5)^3 = 16^3 = 4096$

उत्तर : कुल 4096 गोलियाँ बनेंगी

प्रश्न 6. एक ठोस लोहे की छड़ (बेलनाकार) की आधार-त्रिज्या 32 cm और लंबाई 35 cm है। इस छड़ को पिघलाकर 8 cm त्रिज्या और 28 cm ऊँचाई वाले कितने ठोस शंकु बनाए जा सकते हैं? ज्ञात करो।

दिया है : छड़ की त्रिज्या = 32 cm, लंबाई = 35 cm; एक शंकु की त्रिज्या = 8 cm, ऊँचाई = 28 cm

छड़ का आयतन = $\pi \times 32^2 \times 35$ घन cm

एक शंकु का आयतन = $(1/3)\pi \times 8^2 \times 28$ घन cm

माना शंकुओं की संख्या = n

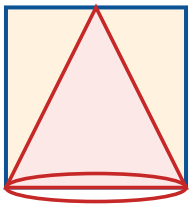
पिघलाने पर कुल आयतन बराबर रहता है,

∴ $n \times (1/3)\pi \times 8^2 \times 28 = \pi \times 32^2 \times 35$

⇒ $n = (32^2 \times 35 \times 3)/(8^2 \times 28) = (1024 \times 35 \times 3)/(64 \times 28) = 60$

उत्तर : कुल 60 शंकु बनाए जा सकते हैं

प्रश्न 7. 4.2 डेसीमी कोर (किनारे) वाले लकड़ी के एक ठोस घन से, कम-से-कम लकड़ी बर्बाद करके, सबसे बड़ा ठोस शंकु बनाया गया। शंकु का आयतन ज्ञात करो।



चित्र — घन के अंदर सबसे बड़ा शंकु : आधार-व्यास = कोर, ऊँचाई = कोर

दिया है : घन की कोर = 4.2 डेसीमी

कम-से-कम लकड़ी बर्बाद हो, इसके लिए शंकु का आधार-व्यास = घन की कोर = 4.2 डेसीमी

∴ शंकु की त्रिज्या r = 4.2/2 = 2.1 डेसीमी और ऊँचाई h = 4.2 डेसीमी

शंकु का आयतन = $(1/3)\pi r^2 h$

= $(1/3) \times (22/7) \times (2.1)^2 \times 4.2$

= $(1/3) \times (22/7) \times 4.41 \times 4.2 = 19.404$ घन डेसीमी

उत्तर : शंकु का आयतन ≈ 19.4 घन डेसीमी

प्रश्न 8. एक ठोस गोले और एक ठोस बेलन की त्रिज्याएँ बराबर हैं और उनके आयतन भी बराबर हैं। बेलन की त्रिज्या और ऊँचाई का अनुपात ज्ञात करो।

दिया है : माना दोनों की त्रिज्या = r इकाई और बेलन की ऊँचाई = h इकाई; दोनों के आयतन बराबर हैं

गोले का आयतन = $(4/3)\pi r^3$

बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

प्रश्नानुसार, दोनों के आयतन बराबर हैं,

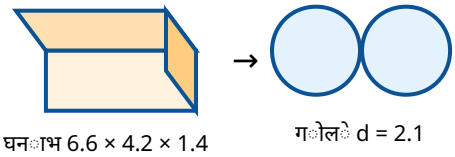
∴ $\pi r^2 h = (4/3)\pi r^3$

⇒ $h = (4/3)r$

⇒ $r/h = 3/4$

उत्तर : त्रिज्या : ऊँचाई = 3 : 4

प्रश्न 9. ताँबे के एक ठोस घनाभ टुकड़े की लंबाई 6.6 डेसीमी, चौड़ाई 4.2 डेसीमी और मोटाई 1.4 डेसीमी है। इसे पिघलाकर 2.1 डेसीमी व्यास वाले कितने ठोस गोले बनाए जा सकते हैं? प्रत्येक गोले में कितनी धातु (घन डेसीमी) होगी, यह भी ज्ञात करो।



चित्र — घनाभ पिघलाकर गोले (सभी इकाई डेसीमी में)

दिया है : घनाभ की लंबाई = 6.6, चौड़ाई = 4.2, मोटाई = 1.4 डेसीमी; एक गोले की त्रिज्या = 2.1/2 = 1.05 डेसीमी

घनाभ का आयतन = 6.6 × 4.2 × 1.4 = 38.808 घन डेसीमी

एक गोले का आयतन = $(4/3)\pi r^3$

= $(4/3) \times (22/7) \times (1.05)^3$ = 4.851 घन डेसीमी

माना गोलों की संख्या = n

पिघलाने पर कुल आयतन बराबर रहता है,

∴ n = 38.808/4.851 = 8

उत्तर : 8 गोले बनेंगे; प्रत्येक गोले में धातु = 4.851 घन डेसीमी

प्रश्न 10. 4.2 cm त्रिज्या वाले ठोस सोने के गोले को पिघलाकर 2.8 cm व्यास वाली एक बेलनाकार छड़ बनाई गई। छड़ की लंबाई ज्ञात करो।

दिया है : गोले की त्रिज्या = 4.2 cm; छड़ की त्रिज्या = 2.8/2 = 1.4 cm

गोले का आयतन = $(4/3)\pi \times (4.2)^3$ घन cm

माना छड़ की लंबाई = h cm

छड़ का आयतन = $\pi \times (1.4)^2 \times h$ घन cm

पिघलाने पर आयतन बराबर रहता है,

∴ $\pi \times (1.4)^2 \times h = (4/3)\pi \times (4.2)^3$

⇒ h = $(4 \times 74.088)/(3 \times 1.96)$ = 98.784/1.96 = 50.4 cm

उत्तर : छड़ की लंबाई = 50.4 cm

प्रश्न 11. 6 डेसीमी व्यास वाले ठोस चाँदी के गोले को पिघलाकर 1 डेसीमी लंबाई वाली एक ठोस बेलनाकार छड़ बनाई गई। छड़ की व्यास ज्ञात करो।

दिया है : गोले की त्रिज्या = 6/2 = 3 डेसीमी; छड़ की लंबाई = 1 डेसीमी

गोले का आयतन = $(4/3)\pi \times 3^3 = 36\pi$ घन डेसीमी

माना छड़ की त्रिज्या = r डेसीमी

छड़ का आयतन = $\pi r^2 \times 1 = \pi r^2$ घन डेसीमी

पिघलाने पर आयतन बराबर रहता है,

∴ $\pi r^2 = 36\pi$

⇒ $r^2 = 36$ ⇒ r = 6 डेसीमी

∴ छड़ की व्यास = 2 × 6 = 12 डेसीमी

उत्तर : छड़ की व्यास = 12 डेसीमी

प्रश्न 12. एक ठोस बेलनाकार छड़ के अनुप्रस्थ-काट (cross-section) की त्रिज्या 3.2 डेसीमी है। छड़ को पिघलाकर 8 cm त्रिज्या वाले 21 ठोस गोले बनाए गए। छड़ की लंबाई ज्ञात करो।

दिया है : छड़ की त्रिज्या = 3.2 डेसीमी = 32 cm; एक गोले की त्रिज्या = 8 cm; गोलों की संख्या = 21

21 गोलों का कुल आयतन = $21 \times (4/3)\pi \times 8^3$ घन cm

माना छड़ की लंबाई = h cm

छड़ का आयतन = $\pi \times 32^2 \times h$ घन cm

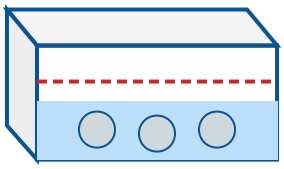
पिघलाने पर आयतन बराबर रहता है,

$\therefore \pi \times 32^2 \times h = 21 \times (4/3)\pi \times 8^3$

$\Rightarrow h = (21 \times 4 \times 512)/(3 \times 1024) = 14{,}336/1024 = 14$ cm

उत्तर : छड़ की लंबाई = 14 cm

प्रश्न 13. एक टंकी की लंबाई 21 डेसीमी, चौड़ाई 11 डेसीमी और गहराई 6 डेसीमी है। टंकी आधी पानी से भरी है। अब 21 cm व्यास वाले लोहे के 100 गोले पानी में पूरी तरह डुबो दिए गए। पानी का स्तर कितना (डेसीमी में) ऊपर उठेगा, ज्ञात करो।



टंकी 21 × 11 डेसीमी (आधी भरी)

चित्र — गोले डुबोने से पानी ऊपर उठता है (लाल रेखा = नया स्तर)

दिया है : टंकी का आधार = 21 × 11 डेसीमी; एक गोले का व्यास = 21 cm = 2.1 डेसीमी, अर्थात त्रिज्या = 1.05 डेसीमी; गोलों की संख्या = 100

एक गोले का आयतन = $(4/3) \times (22/7) \times (1.05)^3 = 4.851$ घन डेसीमी

$\therefore$ 100 गोलों का कुल आयतन = $100 \times 4.851 = 485.1$ घन डेसीमी

माना पानी का स्तर h डेसीमी ऊपर उठा

बढ़े हुए पानी का आयतन = $21 \times 11 \times h = 231h$ घन डेसीमी

डुबोने पर बढ़े पानी का आयतन = डूबे गोलों का आयतन,

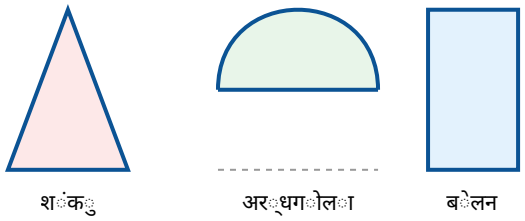
$\therefore 231h = 485.1$

$\Rightarrow h = 485.1/231 = 2.1$ डेसीमी

उत्तर : पानी का स्तर 2.1 डेसीमी ऊपर उठेगा

सोचो : "टंकी आधी भरी है" इसलिए दिया है ताकि गोले पूरी तरह डूब सकें और पानी बाहर न बहे — बची हुई गहराई 3 डेसीमी है और वृद्धि सिर्फ 2.1 डेसीमी है, इसलिए पानी बाहर नहीं गिरेगा।

प्रश्न 14. समान आधार-व्यास और समान ऊँचाई वाले एक ठोस शंकु, एक ठोस अर्धगोले और एक ठोस बेलन के आयतनों का अनुपात ज्ञात करो।



चित्र — तीनों का आधार-व्यास और ऊँचाई समान (अर्धगोले की ऊँचाई = उसकी त्रिज्या)

दिया है : माना तीनों की त्रिज्या = r इकाई। अर्धगोले की ऊँचाई उसकी त्रिज्या के बराबर होती है, इसलिए "समान ऊँचाई" का अर्थ है — तीनों की ऊँचाई = r इकाई

शंकु का आयतन = $(1/3)\pi r^2 \times r = (1/3)\pi r^3$

अर्धगोले का आयतन = $(2/3)\pi r^3$

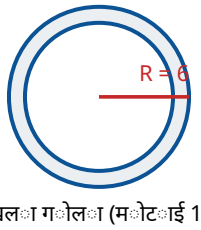
बेलन का आयतन = $\pi r^2 \times r = \pi r^3$

∴ शंकु : अर्धगोला : बेलन = $(1/3)\pi r^3 : (2/3)\pi r^3 : \pi r^3$

= (1/3) : (2/3) : 1 = 1 : 2 : 3

उत्तर : शंकु : अर्धगोला : बेलन = 1 : 2 : 3

प्रश्न 15. सीसे (lead) की 1 cm मोटी चादर से बने एक खोखले गोले की बाहरी त्रिज्या 6 cm है। गोले को पिघलाकर 2 cm त्रिज्या वाली एक ठोस बेलनाकार छड़ बनाई गई। छड़ की लंबाई ज्ञात करो।



चित्र — खोखला गोला : बाहरी R = 6, भीतरी r = 6 − 1 = 5

दिया है : बाहरी त्रिज्या R = 6 cm; मोटाई = 1 cm, इसलिए भीतरी त्रिज्या r = 6 − 1 = 5 cm; छड़ की त्रिज्या = 2 cm

खोखले गोले की धातु का आयतन = $(4/3)\pi(R^3 - r^3)$

= $(4/3)\pi(6^3 - 5^3) = (4/3)\pi \times 91$ घन cm

माना छड़ की लंबाई = h cm

छड़ का आयतन = $\pi \times 2^2 \times h = 4\pi h$ घन cm

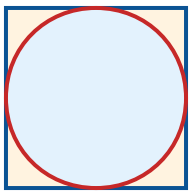
पिघलाने पर आयतन बराबर रहता है,

∴ $4\pi h = (4/3)\pi \times 91$

⇒ h = 91/3 = 30⅓ cm

उत्तर : छड़ की लंबाई = 30⅓ cm (लगभग 30.33 cm)

प्रश्न 16. एक लकड़ी के लट्ठे (घनाभ-आकार) की लंबाई 2 m है और उसका अनुप्रस्थ-काट एक वर्ग है, जिसकी प्रत्येक भुजा 14 डेसीमी है। इस लट्ठे को कम-से-कम लकड़ी बर्बाद करके एक बेलनाकार लट्ठे में बदला गया। कितनी लकड़ी (घन m में) बर्बाद होगी, ज्ञात करो।



वर्ग काट 1.4 m × 1.4 m

चित्र — वर्गाकार काट के अंदर सबसे बड़ा वृत्त = बेलन का आधार

दिया है : वर्ग की प्रत्येक भुजा = 14 डेसीमी = 1.4 m; लट्ठे की लंबाई = 2 m

घनाभ लट्ठे का आयतन = 1.4 × 1.4 × 2 = 3.92 घन m

कम-से-कम लकड़ी बर्बाद हो, इसके लिए बेलन का व्यास = वर्ग की भुजा = 1.4 m

∴ बेलन की त्रिज्या = 1.4/2 = 0.7 m

बेलनाकार लट्ठे का आयतन = $\pi \times (0.7)^2 \times 2$

= $(22/7) \times 0.49 \times 2 = 3.08$ घन m

∴ बर्बाद हुई लकड़ी = 3.92 − 3.08 = 0.84 घन m

उत्तर : 0.84 घन m लकड़ी बर्बाद होगी

बहुविकल्पीय प्रश्न (MCQ)

MCQ 1. r इकाई त्रिज्या वाले एक ठोस गोले को पिघलाकर r इकाई ऊँचाई वाला एक ठोस शंकु बनाया गया। शंकु के आधार की त्रिज्या होगी — (क) 2r इकाई (ख) 3r इकाई (ग) r इकाई (घ) 4r इकाई

माना शंकु की आधार-त्रिज्या = R इकाई

पिघलाने पर आयतन बराबर रहता है,

∴ $(1/3)\pi R^2 \times r = (4/3)\pi r^3$

⇒ $R^2 = 4r^2 \Rightarrow R = 2r$ इकाई

उत्तर : (क) 2r इकाई

MCQ 2. एक ठोस शंकु को पिघलाकर उसी त्रिज्या वाला बेलन बनाया गया, जिसकी ऊँचाई 5 cm है। शंकु की ऊँचाई होगी — (क) 10 cm (ख) 15 cm (ग) 18 cm (घ) 24 cm

माना शंकु की ऊँचाई = h cm और उभयनिष्ठ त्रिज्या = r cm

पिघलाने पर आयतन बराबर रहता है,

$\therefore (1/3)\pi r^2 h = \pi r^2 \times 5$

$\Rightarrow h = 5 \times 3 = 15$ cm

उत्तर : (ख) 15 cm

MCQ 3. एक बेलन की त्रिज्या r इकाई और ऊँचाई 2r इकाई है। इस बेलन में रखे जा सकने वाले सबसे बड़े गोले की व्यास होगी — (क) r इकाई (ख) 2r इकाई (ग) r/2 इकाई (घ) 4r इकाई

गोले की व्यास न तो बेलन की व्यास (2r) से बड़ी हो सकती है, न ही बेलन की ऊँचाई (2r) से — दोनों सीमाएँ 2r हैं।

∴ सबसे बड़े गोले की व्यास = 2r इकाई

उत्तर : (ख) 2r इकाई

MCQ 4. r इकाई त्रिज्या वाले ठोस अर्धगोले से काटकर बनाया जा सकने वाला सबसे बड़ा ठोस शंकु का आयतन होगा — (क) $4\pi r^3$ घन इकाई (ख) $3\pi r^3$ घन इकाई (ग) $\pi r^3/3$ घन इकाई (घ) πr^3 घन इकाई

सबसे बड़े शंकु की त्रिज्या = r इकाई और ऊँचाई = r इकाई होगी।

$\therefore$ आयतन = $(1/3)\pi r^2 \times r = \pi r^3/3$ घन इकाई

उत्तर : (ग) $\pi r^3/3$ घन इकाई

MCQ 5. x इकाई कोर वाले ठोस घन से सबसे बड़ा ठोस गोला काटकर निकाला जाए, तो गोले की व्यास होगी — (क) x इकाई (ख) 2x इकाई (ग) x/2 इकाई (घ) 4x इकाई

घन के अंदर समाने वाले सबसे बड़े गोले की व्यास = घन की कोर होती है।

∴ गोले की व्यास = x इकाई

उत्तर : (क) x इकाई

सत्य / असत्य

1. समान आधार-त्रिज्या (r इकाई) वाले दो ठोस अर्धगोलों को आधार से जोड़ने पर बने ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $6\pi r^2$ वर्ग इकाई होगा।

दो अर्धगोले आधार से जुड़कर एक पूरा गोला बनाते हैं।

गोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$ वर्ग इकाई होता है, $6\pi r^2$ नहीं।

∴ दिया गया कथन सही नहीं है।

उत्तर : असत्य

2. r इकाई त्रिज्या, h इकाई ऊँचाई और l इकाई तिर्यक ऊँचाई वाले एक ठोस शंकु को, समान त्रिज्या व समान ऊँचाई वाले एक बेलन के एक आधार पर जोड़ा गया। बने ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ($\pi rl + 2\pi rh + \pi r^2$) वर्ग इकाई होगा।

बने ठोस में बाहर दिखने वाले पृष्ठ हैं — शंकु का वक्र पृष्ठ (πrl), बेलन का वक्र पृष्ठ ($2\pi rh$) और बेलन का खुला आधार (πr^2)। जुड़ी हुई सतहें अंदर छिप जाती हैं, इसलिए वे नहीं गिनी जाएँगी।

∴ कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi rl + 2\pi rh + \pi r^2$ वर्ग इकाई

उत्तर : सत्य

रिक्त स्थान भरो

1. एक बेलन के दोनों सिरों पर समान त्रिज्या वाले दो अर्धगोले जोड़ दिए जाएँ, तो नए ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = एक अर्धगोले का वक्र पृष्ठ + _____ का वक्र पृष्ठ + दूसरे अर्धगोले का वक्र पृष्ठ।

उत्तर : बेलन

2. एक सिरे से छिली हुई (sharpen की हुई) पेंसिल का आकार शंकु और _____ का मिश्रण है।

उत्तर : बेलन

3. एक ठोस गोले को पिघलाकर एक ठोस बेलन बनाया गया। गोले और बेलन के आयतन _____ होंगे।

उत्तर : बराबर

लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer)

SA 1. एक ठोस शंकु को पिघलाकर एक ठोस बेलन बनाया गया। दोनों की त्रिज्याएँ समान हैं। यदि शंकु की ऊँचाई 15 cm हो, तो बेलन की ऊँचाई ज्ञात करो।

माना दोनों की त्रिज्या = r cm और बेलन की ऊँचाई = h cm

पिघलाने पर आयतन बराबर रहता है,

$\therefore \pi r^2 h = (1/3)\pi r^2 \times 15$

$\Rightarrow h = 15/3 = 5$ cm

उत्तर : बेलन की ऊँचाई = 5 cm

SA 2. एक ठोस शंकु और एक ठोस गोले की त्रिज्याएँ समान हैं और आयतन भी समान हैं। गोले की व्यास और शंकु की ऊँचाई का अनुपात ज्ञात करो।

माना दोनों की त्रिज्या = r इकाई और शंकु की ऊँचाई = h इकाई

आयतन समान हैं,

$\therefore (4/3)\pi r^3 = (1/3)\pi r^2 h$

$\Rightarrow h = 4r$

गोले की व्यास = 2r

$\therefore$ व्यास : ऊँचाई = 2r : 4r = 1 : 2

उत्तर : व्यास : ऊँचाई = 1 : 2

SA 3. समान व्यास और समान ऊँचाई वाले एक ठोस बेलन, एक ठोस शंकु और एक ठोस गोले के आयतनों का अनुपात ज्ञात करो।

माना तीनों की त्रिज्या = r इकाई। गोले की ऊँचाई उसकी व्यास (2r) ही होती है, इसलिए समान ऊँचाई = 2r इकाई

बेलन का आयतन = $\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$

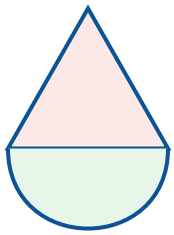
शंकु का आयतन = $(1/3)\pi r^2 \times 2r = (2/3)\pi r^3$

गोले का आयतन = $(4/3)\pi r^3$

$\therefore$ बेलन : शंकु : गोला = 2 : (2/3) : (4/3) = 3 : 1 : 2

उत्तर : बेलन : शंकु : गोला = 3 : 1 : 2

SA 4. एक ठोस का निचला भाग अर्धगोला और ऊपरी भाग शंकु है। यदि दोनों भागों के वक्र पृष्ठों के क्षेत्रफल बराबर हों, तो शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई का अनुपात ज्ञात करो।



चित्र — मिश्रित ठोस : ऊपर शंकु, नीचे अर्धगोला

दिया है : माना दोनों भागों की उभयनिष्ठ त्रिज्या = r इकाई और शंकु की ऊँचाई = h इकाई

शंकु की तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{(r^2 + h^2)}$

अर्धगोले का वक्र पृष्ठ $= 2\pi r^2$

शंकु का वक्र पृष्ठ $= \pi r l = \pi r\sqrt{(r^2 + h^2)}$

प्रश्नानुसार, दोनों वक्र पृष्ठ बराबर हैं,

$\therefore \pi r\sqrt{(r^2 + h^2)} = 2\pi r^2$

$\Rightarrow \sqrt{(r^2 + h^2)} = 2r$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

$r^2 + h^2 = 4r^2$

$\Rightarrow h^2 = 3r^2 \Rightarrow h = \sqrt{3}\, r$

$\Rightarrow r : h = 1 : \sqrt{3}$

उत्तर : त्रिज्या : ऊँचाई = 1 : √3

आम ग़लतियाँ — exam में नंबर यहीं कटते हैं :

1. पिघलाने वाले प्रश्नों में **पृष्ठीय क्षेत्रफल** बराबर करना — ग़लत! पिघलाने पर सिर्फ **आयतन** बराबर रहता है।
2. इकाई बदलना भूलना — 2.8 m को 280 cm, 3.2 डेसीमी को 32 cm, 21 cm को 2.1 डेसीमी किए बिना हिसाब शुरू मत करो।
3. शंकु के आयतन में **(1/3)** भूलना — इस अध्याय की सबसे आम ग़लती।
4. खोखली वस्तु में भीतरी त्रिज्या = बाहरी त्रिज्या − मोटाई लेना न भूलें (प्रश्न 15)।
5. डुबोने वाले प्रश्नों में डूबी वस्तु का आयतन ही पानी की वृद्धि के बराबर होता है — बर्तन का पूरा आयतन नहीं।

नोट : प्रश्न कोशे देखि 19 (गणित प्रकाश, कक्षा 10) पर आधारित हैं; सभी हल सरल हिंदी में, अपने शब्दों में लिखे गए हैं ताकि बच्चा exam में same-to-same इसी बहती हुई शैली में लिख सके।